

Šteila e , zakon naravnih rasti

Sporočimo se: Opazujemo zaporedje

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Določiti bomo: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergenca

Definicija Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

- Eulerjev šteila

Izrek: Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentno.

Preden se lotimo dokaza, bomo določili

Bernoullijevo neenakost.

Tétel: $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ és $\forall$ α $\alpha > -1$ re

$\alpha > -1$ re

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

Dokk:

$$n = 1 \quad - \quad 1 + \alpha = 1 + \alpha \quad \text{öccs}$$

$$n \rightarrow n+1$$

Indukciós hipotézis:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{re}$$

Kérdés: $n+1$?

$$\underline{(1 + \alpha)^{n+1}} = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^n \stackrel{\text{ind. hipotézis}}{\geq} (1 + \alpha)(1 + n\alpha) =$$

$$= 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 >$$

$$> \underline{1 + (n+1)\alpha}$$

□

Dokaz izvele: Dokazati bismo, da zbiranje
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira

Najprije bismo dokazali, da zbiranje

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

prilazi.

Dokaz:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \\ &= \frac{n^n}{(n-1)^n} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n (n+1)^n (n+1)} = \\ &= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{\frac{n}{n^2-1}}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \underline{1} \end{aligned}$$

Torej:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1 \quad b_{n+1} > b_n$$

Torej zaporedje $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *pada*. Ker
vsaki členi so pozitivni, zato je zaporedje
monotonno upadajo in zato ima limito.

Obkrijz kraj $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

več je

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= a_n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$b_n = a_n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right) b_n$$

konvergentno
zaporedje

konvergentno
zaporedje

Zato refi

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\end{aligned}$$

Ker limit b_n obstoji, tudi limit a_n .

Poznamo: Posledni dve pogoji izražata $\{b_n\}$
 $\Rightarrow \{b_n\}$ kvergira, kar je morda enostavno.

$$\begin{aligned}\text{Videlismo } b_n &= a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ b_n &= a_n \left(\frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ker $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ kvergira, moramo konvergenti tudi $\{a_n\}$.
 Če pa velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Bistveno: Limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ obstaja.

Poleg zvezneje reši tudi:

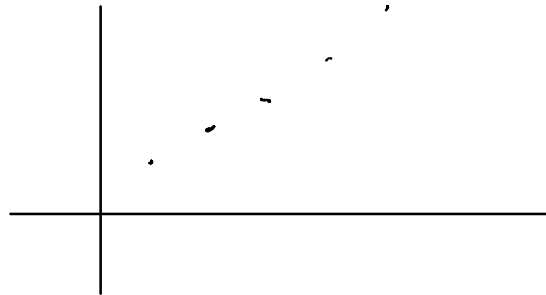
Zvezni $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je
konvergenca in reši

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Velja še več: Imajo kakšno koli zvezno
 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, za katero reši:

1.) monotono naraščajoča in je navzgor neskončna.
Zdela bi rekli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$



Tudi reši

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

Primer: Oglejmo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{t}}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{t}}\right)^{\frac{n}{t} t} \quad \text{=} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{t}}\right)^{\frac{n}{t}} \right)^t = e^t \end{aligned}$$

Od kod = ? Dokazati bomo, da velja
povsemben izrek, ki pravi:

Naj bo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija.

Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentna zaporedja.

Torej je konvergentna tudi zaporedja $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

V našem primeru

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{t}}\right)^{\frac{n}{t}}$$

Ogļdzini $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot t$, (Piemē)

$$d_n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{c_n} \right)^t$$

Tātad; $d_n = c_n^t$,

arī, t ir $f(x) = x^t$,

zīmī funkcija
 $x \neq 0$

polinoms ir

$$d_n = f(c_n)$$

2.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right) = f(e) = e^t$$

Zālam mērījumu rēķini

Operatīvās vērtības (fiziskās, bioloģiskās,
ekonomiskās...), kuru vērtība se vērā
spējmainās kļūde:

Prírastek k účinné x v čase t je
direktno souzmězen s účinnou x v zátěhem
časem a s přetokem čísel.

(Prírastek je buďto nezáporný.)

$x(0)$ - zátěž účinné - k účinné v čase $t=0$

$x(t)$ - účinné v čase t

Zákon může být

$$x(t) = x(0) + \text{prírastek}$$

$$x(t) = x(0) + k \cdot t \cdot x(0)$$

↑
konstanta růstu

$k > 0$ účinné nerostí

$k < 0$ účinné roste.

Sprejimo: $t_2 > t_1$

$$x(t_2) = x(t_1) + k(t_2 - t_1) x(t_1)$$

To je približna formuluja, ki ne more
vesti. Idealni svet more biti obliko,
če je časovni interval, v katerem prirostek
oprežamo, nestanimo mejten.

Kaj imamo v mislih.

Prirejamo obliko $x(t)$ v času t , ki smo jo
z oprijem prilis izračunali na dno
mreže.

1.

$$x(t) = x_0 + kt x_0$$

2.) Razdelimo časovni interval $[0, t]$ na

dv dele $[0, \frac{t}{2}]$ in $[\frac{t}{2}, t]$

Dolom:

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = x_0 + k \frac{t}{2} x_0 =$$

$$= x_0 \left(1 + \frac{k t}{2}\right)$$

$$x(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) + k \frac{t}{2} x\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= x\left(\frac{t}{2}\right) \left(1 + \frac{k t}{2}\right) =$$

$$= x_0 \left(1 + \frac{k t}{2}\right) \left(1 + \frac{k t}{2}\right)$$

$$= x_0 \left(1 + \frac{k t}{2}\right)^2$$

$$= x_0 \left(1 + k t + \frac{k^2 t^2}{4}\right)$$

Podzielmy cały interwał $[0, t]$ na n części

$$[0, t] = \left[0, \frac{t}{n}\right], \left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right], \left[\frac{2t}{n}, \frac{3t}{n}\right] \dots \left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right]$$


Izračunajmo $x(t)$ s pomočjo rekurzivne zveze $x(\frac{k \cdot t}{n})$

$$x_0 = x(0)$$

$$x(\frac{t}{n}) = x_0 + \frac{1}{n} \frac{t}{n} x_0 = x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} x(\frac{2t}{n}) &= x(\frac{t}{n}) + \frac{1}{n} \frac{t}{n} x(\frac{t}{n}) = x(\frac{t}{n}) \left(1 + \frac{kt}{n} \right) = \\ &= x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\frac{3t}{n}) &= x(\frac{2t}{n}) + \frac{1}{n} \frac{t}{n} x(\frac{2t}{n}) = x(\frac{2t}{n}) \left(1 + \frac{kt}{n} \right) = \\ &= x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^3 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \underline{x(\frac{lt}{n})} &= x(\frac{(l-1)t}{n}) + \frac{1}{n} \frac{t}{n} x(\frac{(l-1)t}{n}) = x(\frac{(l-1)t}{n}) \left(1 + \frac{kt}{n} \right) \\ &= x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^{(l-1)} \left(1 + \frac{kt}{n} \right) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= \underline{x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^l}$$

$$x(t) = x(\frac{nt}{n}) = x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^n$$

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^n$$

Kot smo rekli, dobimo pravi zakon naravnega rasti, če so intervali, v katerih operujemo, primerno *neskončno majhni*. To pa lahko dosežemo tako, da v zgoraj formuli *postavimo* n *pusti* ∞ .

Torej: Pravi zakon naravnega rasti:

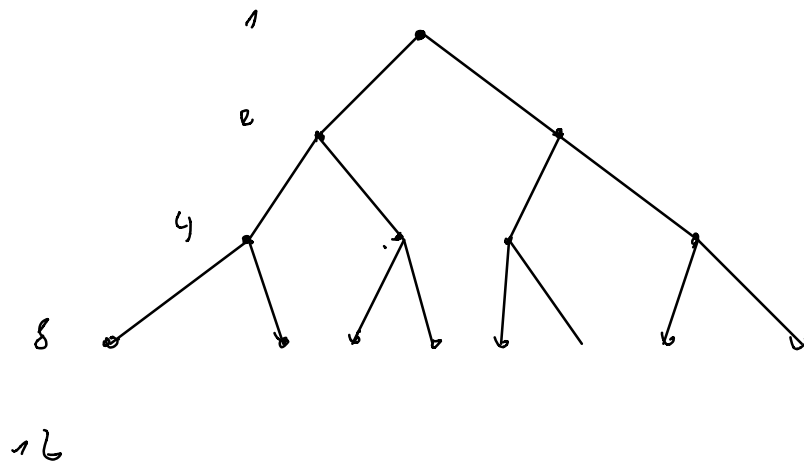
$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^n$$

Videči pramo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kt}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{kt}} \right)^{\frac{n}{kt} kt} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{kt}} \right)^{\frac{n}{kt}} \right)^{kt} = e^{kt} \end{aligned}$$

Torej:

$$x(t) = x_0 e^{kt} \quad \text{Zakon naravnega rasti.}$$



D.N. Deniss, az a (v azéni frizor)

šlovák okužen v Covid 19 spreminjz cursscaj
po zrkornu nane risti

$t = 1.5$, $x(t)$ - šlovák okužen v čas t .

Deniss, az refz: v enem tedne x_0 šlovák
mnoštvo 25%. V kadikórn ézsar a
 x_0 šlovák okužen podojst?

$$x(t) = x_0 e^{kt} \quad t \text{ stojí v tedni}$$

$$x(1) = x_0 + \frac{x_0}{4} = \frac{5x_0}{4}$$

$$x(t) = 2x_0 \quad t = \tau$$