

Naj bo $U: V \rightarrow W$ dana linearna preslikava.

Potem je $\text{Im } U$ vektorski podprostor W . Njegova dimenzija se imenuje RANK preslikave U .

Prostor $\text{Ker } U := U^{-1}(0)$ je (tudi) vektorski podprostor prostora V .
↳ kernel

$\text{Im } U = \text{Lin} \{ U(v_1), \dots, U(v_m) \}$, kjer so $v_1, \dots, v_m$ baza V .
 $\dim \text{Im } U \leq \min \{ \dim V, \dim W \}$

$U^{-1}(0)$ je vektorski podprostor V .

Ker U : 0 je ker U .

Dokazimo, da $u, w \in \text{Ker } U$.

$$U(\alpha u + \beta w) = \alpha U(u) + \beta U(w) = 0 \Rightarrow \alpha u + \beta w \in \text{Ker } U.$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0$

1. Preverimo, da sta preslikavi linearni in opisujeta geometrijski model.

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, 0)$

(b) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x, x+y)$

Zapišimo A in B z matrikama A in B v standardni bazi.

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} \alpha x + \beta x_1 \\ \alpha y + \beta y_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha f(v) + \beta f(w)$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = x \cdot \underbrace{f(e_1)} + y \cdot \underbrace{f(e_2)}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v stolpec napišemo
slike baznih vektorjev

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

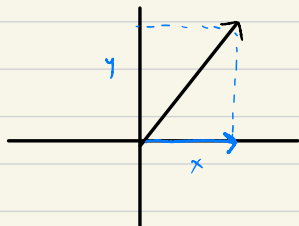
n kompozitov

↓

$$f\left(\underbrace{f(x, y)}_{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f \circ f = f$$

$$\Rightarrow A^n = A$$



Pravokotna projekcija

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \cdot e_1$$

$$\text{Ker } f = \mathbb{R} \cdot e_2$$

$$\text{Rang } f = \text{rang } A = 1$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projekcija na $\mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(b) \quad g(x, y) = (x, x+y) \quad g: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$g(\alpha v + \beta w) = g\left(\begin{bmatrix} \alpha x + \beta x_1 \\ \alpha y + \beta y_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x_1 \\ \alpha x + \beta x_1 + \alpha y + \beta y_1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y+x \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} =$$

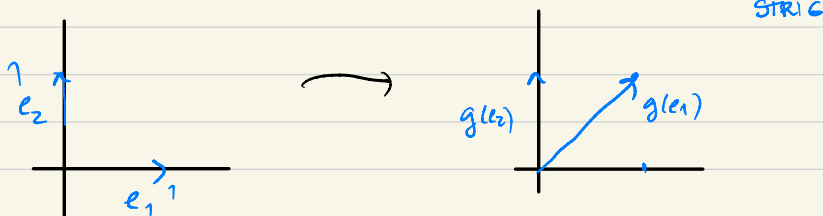
$$= \begin{bmatrix} \alpha x + \beta x_1 \\ \alpha y + \alpha x + \beta x_1 + \beta y_1 \end{bmatrix} \quad : \text{je linerna}$$

$$g(e_1) = g(1, 0) = (1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g(e_2) = g(0, 1) = (0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } g &= \mathbb{R}^2 \\ \text{Ker } g &= \{0\} \\ \text{rang } g &= \text{rang } B = 2 \end{aligned}$$



$$(x, y): \quad g(x, y) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad : \text{lin. system, das z} \\ \text{matrize } B.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad (x, y) = (0, 0)$$

2. naloga (isto besedilo)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x, x) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 : \text{linearna}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (-y, x)$$

(a);

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

std baza $\rightarrow$

$$\text{Im } F = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker } F = \mathbb{R} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } A = \text{rang } F = 1$$

$$\text{Spletno: } f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linearna.} \\ \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = m$$

$$f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

$\uparrow$
 n vektorjev; m : lin. neodvisnih
(rang $f = m$)

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \text{rang } f = m : f \text{ surjektivna}$$

$$\dim \text{Im } f \leq m \text{ in } \dim \text{Im } f \leq n$$

f injektivna: Dokazimo, da je $f(v) = f(w)$, $v \neq w$.

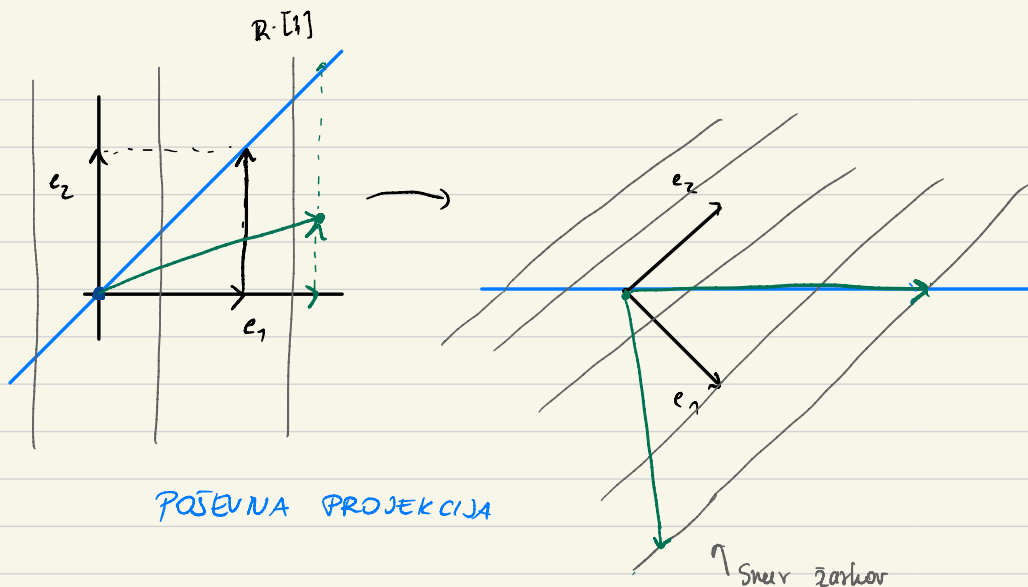
$$(\Leftrightarrow) f(v - w) = 0 \quad (\Leftrightarrow) v - w \in \text{Ker } f$$

f je injektivna $(\Leftrightarrow) \text{Ker } f = \{0\}$, rang $f = m$

$m > n$: f ni injektivna

$n > m$: f ni surjektivna

$m = n$: f bijektivna $(\Leftrightarrow) \text{rang } f = n (\Leftrightarrow) \text{Ker } f = \{0\}$



Izberimo bazo za zapis k preslikave:

$$v_1: f(v_1) = v_1:$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow y=x$$

$f(v_1) = v_1$

$$\text{v bazi } v_1, v_2: f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \cdot f(v_1) + \beta f(v_2) = \\ = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot 0$$

$$\text{v tej bazi pripada } f \text{ matrika } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(v pravih bazah vsi projektorji izgledajo enako)

Skoraj vsako preslikavo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lahko v pravih bazah predstavimo z diagonalno matriko.

$$A: \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

v bazi $\{v_1, v_2\}$ za f :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= d_1 \cdot v_1 \\ f(v_2) &= d_2 \cdot v_2 \end{aligned}$$

lastna reza

$\rightarrow d_1$: lastna vrednost

lastni vektor

$$(b): g(x, y) = f(y, x) = y(-1, 0) + x(1, 1)$$

$$g(xe_1 + ye_2) = y(-1, 0) + x(1, 1)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ pogočno} \\ \text{p.g. } f(x, y) = (x, y)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Piši vse rektorje, za katere je

$$f(v) = \lambda v \quad ; \quad v \neq 0$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\leadsto$

Torej: vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ mora biti v jedru $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

hočemo, da ima $A - \lambda I$ jedro, torej
topomem, da ima sistem
nemichno rešitev.

To pomeni, da $A - \lambda I \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ker Gaussiranje ohranja determinanto, je

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Torej: $\det(A - \lambda I) = 0$ je naša enačba
(karakteristična enačba)

$$(-\lambda) \cdot (-\lambda) + 1 = 0$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda$ nima realnih rešitev, ima
pa kompleksne.

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

$$\lambda_1 = i: \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

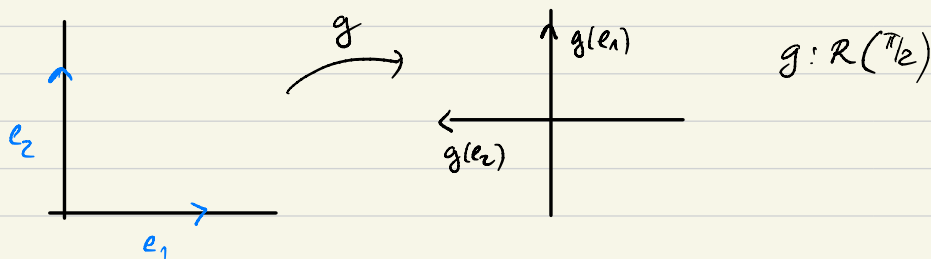
λ_1 smo izbrali tako, da ima $A - \lambda_1 I$ jedro dimenzije vsaj 1. Ker je A 2×2 matrika, topomeni, da sta vsaki lin. odvisni

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -i: \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Preslikani g kot preslikani $A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ pripada v bazi $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ matrika

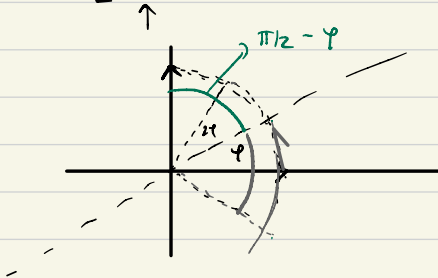
$$B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$



Zasuk za 90° ; v $\mathbb{C}$ ga ponazarja množenje z i . Rotacijske matrike v realnem niso diagonalizabilne (razen za rotacijo za kot π ali njegove večkratnike).

3. nalog: zrceljenje preko $y=2x$

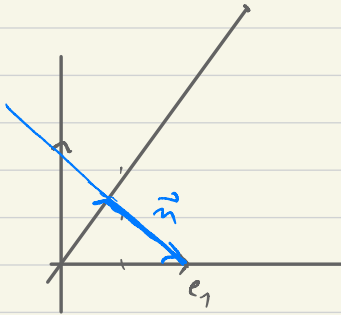
$$\begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$



$$\varphi - (\pi/2 - \varphi) = 2\varphi - \pi/2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \quad \varphi = 63^\circ 43'$$

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$



Projekcija e_1 na $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$: normalna
vektor

$\langle e_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$: projekcija

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1)$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \vec{n} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 - 1/\sqrt{5} \\ 0 - 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

$$z(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \vec{n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$