

# REALNE FUNKCIJE

REALNA FUNKCIJA JE PREDPIS, KI ELEMENTOM  
MNOŽICE  $D$  PRIREDI REALNO ŠTEVILO.

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

PRI TEM NI NUJNO, DA JE  $D \subset \mathbb{R}$ , ČEPRAV  
SE BOHO MI OSREDOTOČILI LE NA TA PRIMER.

## OPOMBA:

~ PREDPISU  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  REČEMO KOMPLEKSNJA  
FUNKCIJA.

~ KADAR IMAMO BOLJ SPLOŠEN PREDPIS  
 $f: A \rightarrow B$ , KJER  $B$  NI PODMNOŽICA  $\mathbb{R}$  ALI  $\mathbb{C}$ ,  
GOVORIMO O PRESLIKAVI.

## OSNOVNI POJMI:

~ OBMOČJU  $D_f \subseteq \mathbb{R}$ , KJER JE FUNKCIJA  
DEFINIRANA PRAVIMO DEFINICIJSKO OBMOČJE.

NPR.  $f(x) = e^x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = [0, \infty),$$

$$h(x) = \ln x, \quad D_h = (0, \infty).$$

~ MNOŽICI SLIK  $Z_f$  PRAVIMO ZALOGA VREDNOSTI

t.j.  $\forall b \in Z_f$  OBSTAJA  $a \in D_f: f(a) = b$ .

NALOGA: POIŠČI DEFINICIJSKO OBMOČJE IN ZALOŽO VREDNOSTI ZA NASLEDNJI FUNKCIJI.

(a)  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ,

(b)  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{5-x}\right)$ .

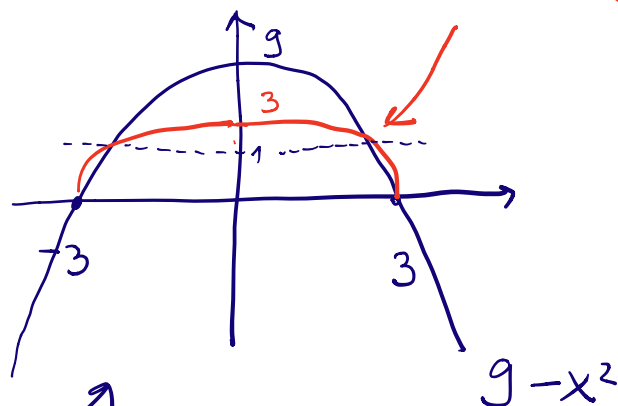
REŠITEV:

(a) ZARADI KORENA MORA VELJATI:

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$(3-x)(3+x) \geq 0$$

$$Df = [-3, 3]$$



KOREN VREDNOSTI  
NAD 1 ZMANJŠA,  
VREDNOSTI MED  
0 IN 1 PA POVEČA

PRI ZALOŽI SI POMAGAMO  
Z GRAFOM. NARIŠEMO  
GA POSTOPOMA. NADPREJ  
 $9 - x^2$ , NATO PA KORENIMO  
VREDNOSTI NA OSI  $y$   
(NEGATIVNE IZGI NEJO  
KER KOREN NI DEFINIRAN)

$$Zf = [0, 3]$$

(b)  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{5-x}\right)$

ZARADI LOGARITMA MORA VELJATI:

$$\frac{x+2}{5-x} > 0$$



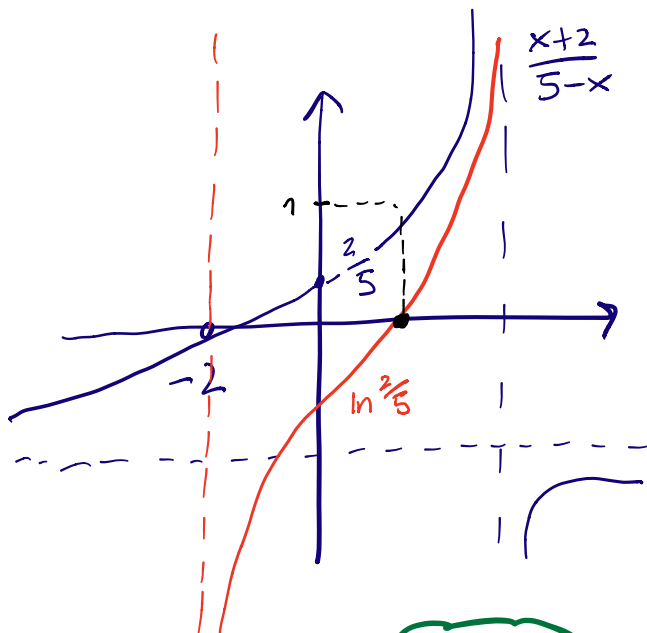
$$Df = (-2, 5)$$

ZNOVA SI POMAGAJMO Z GRAFOM:

$$\sim \frac{x+2}{5-x} : \text{ NIČLA: } x = -2, \\ \text{POL: } x = 5,$$

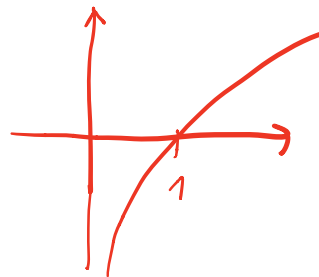
$$\text{ZAČET. VREDNOST: } y = \frac{2}{5},$$

$$\text{ASIMPTOTA: } y = -1$$



SKLEP:  $ZF = \mathbb{R}$

$\sim$  KAKO DELUJE LOGARITEM?



$$x \downarrow 0, \ln x \rightarrow -\infty$$

$$x = 1, \ln x = 0$$

$$x \rightarrow \infty, \ln x \rightarrow \infty$$

$$0 < x < 1, \ln x < 0$$

$$x > 1, \ln x > 0$$

NALOGA: ZA PAR FUNKCIJ  $f$  IN  $g$  IZRAČUNAJ  
PREDPISA ZA  $f \circ g$  IN  $g \circ f$ , TER DOLOČI NJUNA  
DEFINICIJSKO OBMOČJE IN ZAČETNO VREDNOSTI.

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad g(x) = \sqrt{x},$$

$$(b) f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x.$$

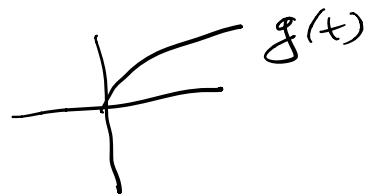
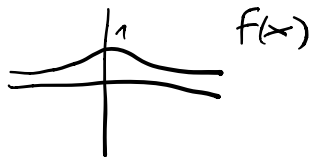
(a) OGLEDAMO SI NASPREJ OSNOVNI FUNKCIJI:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = [0, \infty)$$

$$Z_f = (0, 1]$$

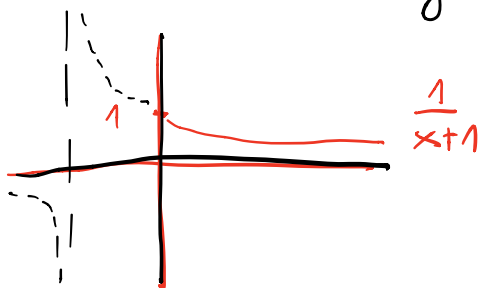
$$Z_g = [0, \infty)$$



$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + 1} = \frac{1}{x+1}$$

IZGLEDA KOT, DA JE  $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ , A TO  
NI RES, SAJ JE  $D_g = \mathbb{R}_+$ . POSLEDIČNO

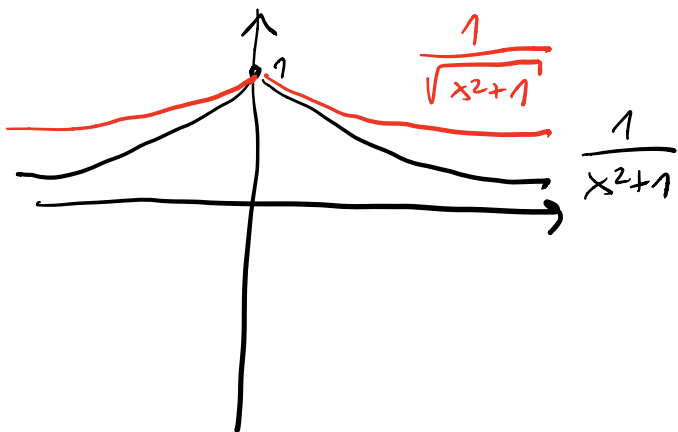
JE TUDI  $D_{f \circ g} = \mathbb{R}_+$  IN  $Z_{f \circ g} = (0, 1]$ .



$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

KER JE  $\frac{1}{x^2+1} \geq 0$  ZA  $\forall x \in \mathbb{R}$ , JE  $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ .

ZALOGO VREDNOSTI PA DOBIMO S KORENENJENJEM:

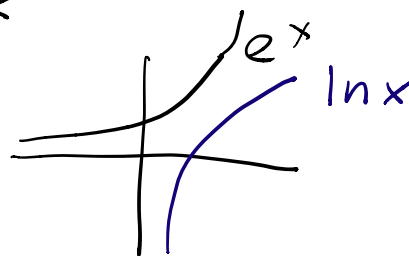


$$Z_f = (0, 1]$$

$$(b) f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x$$

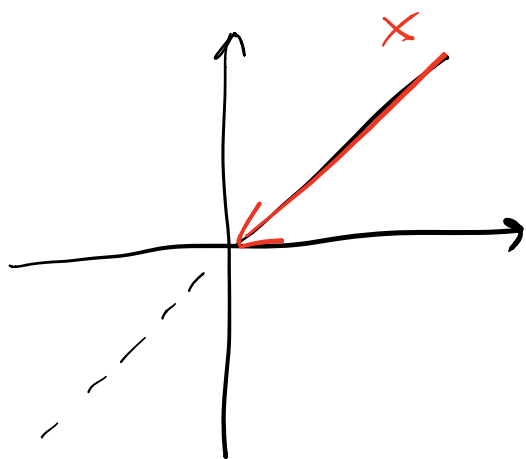
$$D_f = \mathbb{R}, \quad Z_f = (0, \infty).$$

$$D_g = (0, \infty), \quad Z_g = \mathbb{R}.$$



$$f \circ g(x) = e^{\ln x} = x$$

ZNOVA IZGLEDA, KOT DA  $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ , A  
TO NI RES.  $D_{f \circ g} = (0, \infty)$ .

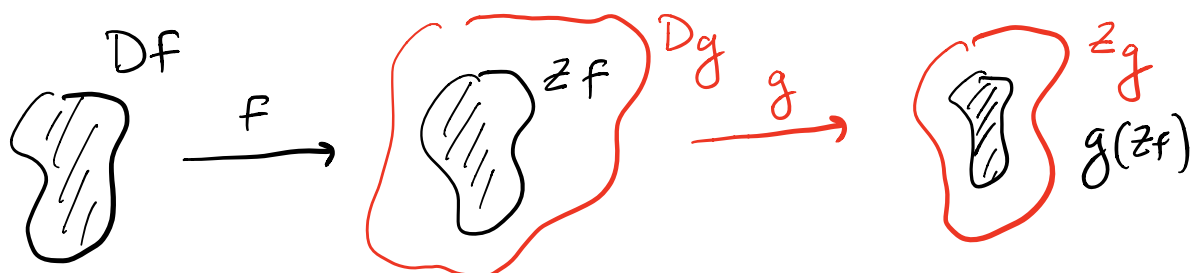


$$Z_f = (0, \infty)$$

$$g \circ f(x) = \ln e^x = x$$

TOKRAT SO VSI VMESNI RAČUNI DEFINIRANI,  
SAJ JE  $e^x > 0$ . TOREJ  $D_f = Z_f = \mathbb{R}$

MORALA: KAKO JE S KOMPOZITUMI V SPLOŠNEM?



ČE JE  $Z_f \subseteq D_g$ , JE  $D_{g \circ f} = D_f$  IN  $Z_{g \circ f} \subseteq Z_g$ .

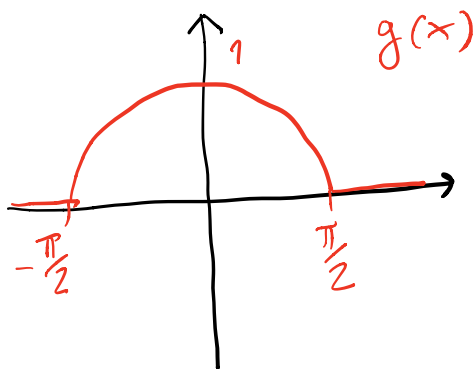
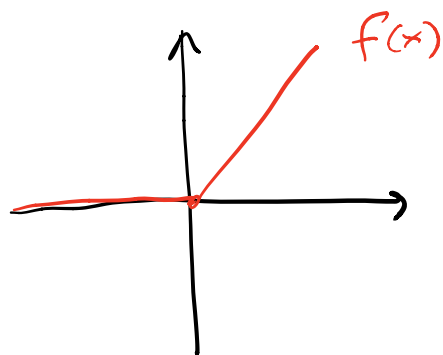
NALOGA:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

IZRAČUNAJ  $f \circ f$ ,  $g \circ g$ ,  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

NARIŠI GRAFE VSEH FUNKCIJ.



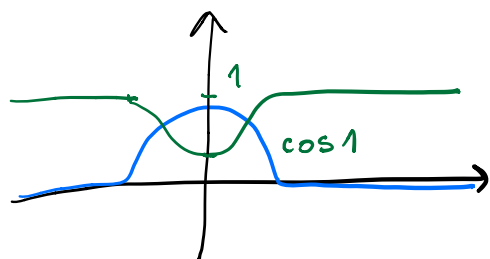
$$f \circ f(x) = \begin{cases} f(0), & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} = f(x)$$

VSI  $x$  SO NENEGATIVNI,  
ZATO JE  $f(x) = x$ .

$$g \circ g(x) = \begin{cases} g(0), & |x| > \frac{\pi}{2}, \\ g(\cos x), & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \cos 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos(\cos x), & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

KER 0  
IN  $\cos x$   
LEŽITA MED  
 $\pm \frac{\pi}{2}$



$g \circ g(x)$   
 $g(x)$

$$= \begin{cases} 1, & |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos(\cos x), & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(0); & |x| > \frac{\pi}{2} \\ f(\cos x); & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

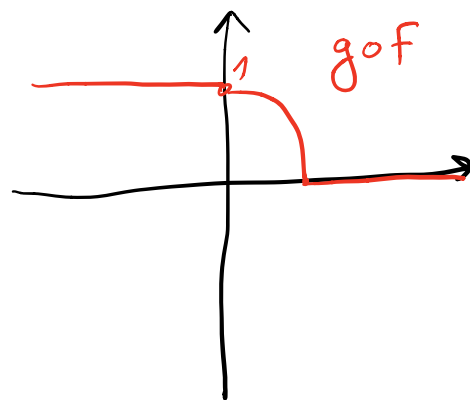
$$= \begin{cases} 0; & |x| > \frac{\pi}{2} \\ \cos x; & |x| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} = g(x)$$

$\uparrow$  KER  $\cos x \geq 0$ ,  
JE  $f(\cos x) = \cos x$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(0); & x < 0 \\ g(x); & x \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{matrix} \overset{1}{=} \\ \cos 0; & x < 0 \\ \cos x; & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0; & x > \frac{\pi}{2} \end{matrix} \end{cases}$$

TREBA JE RAZDELTÍ,  
KER  $g$  RAZLIČEN ZA  
 $|x| \leq \frac{\pi}{2}$  IN  $|x| > \frac{\pi}{2}$



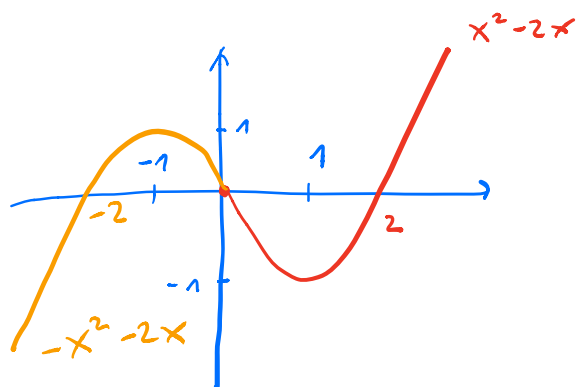
NALOGA: RAVNINSKA KRIVULJA JE PODANA Z

ZVEZO  $y|y| - 2y = x$ . ALI GRE ZA GRAF NEKE

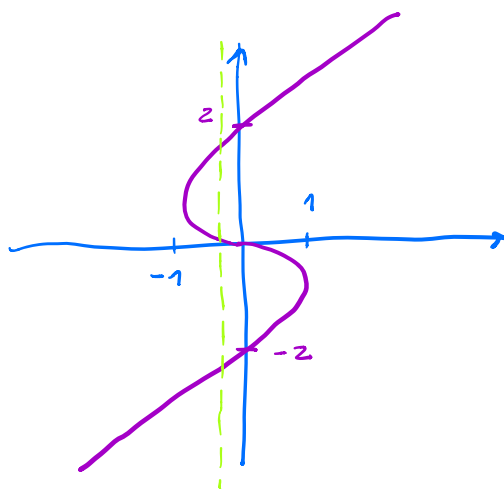
FUNKCIJE  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? KAJ PA ČE ZDŽIMO DEFINICIJSKO  
OBMOČJE IN ZALOŽO VREDNOSTI?

TRIK: ČE IMAMO TEŽAVE Z RISANJEM, LAHKO  
ZAHENJAMO VLOGI  $x$  IN  $y$ , TER NATO  
DOBLJENI GRAF ZRCALIMO ČEZ  $y=x$ .

$$y = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$$



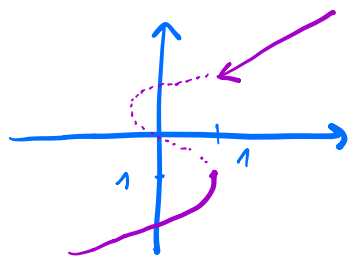
ZRCALIMO  
ČEZ  $y=x$



ALI GRE ZA GRAF FUNKCIJE?

NE, KER ZA  $x \in [-1, 1]$  FUNKCIJSKA VREDNOST  
NI ENOLIČNA t.j. NAVPIČNICA VEČ KOT ENKRAT  
SEKA KRIVULJO.

TEMU SE LAHKO IZOGNENO, ČE SE OMEJIMO LE  
NA DEL KRIVULJE IN ZOŽAMO  $D_y$  TER  $Z_y$ . NPR.

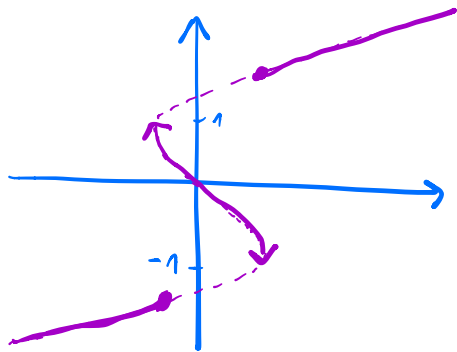


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$Z_f = (-\infty, -1] \cup [1+\sqrt{2}, \infty)$$

$$y^2 - 2y = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$



$$Df = \mathbb{R}$$

$$Zf =$$

MOŽNIH IZBIR JE NEŠTEVNO MNOGO, LAHKO  
PA BI JIH TUDI EKSPLICITNO ZAPISALI.  
ČE TO ŽELIMO, MORAMO IZRAZITI  $y$ :

$$x = y|y| - 2y = \begin{cases} y^2 - 2y, & y \geq 0 \\ -y^2 - 2y, & y < 0 \end{cases}$$

$$x = y^2 - 2y$$

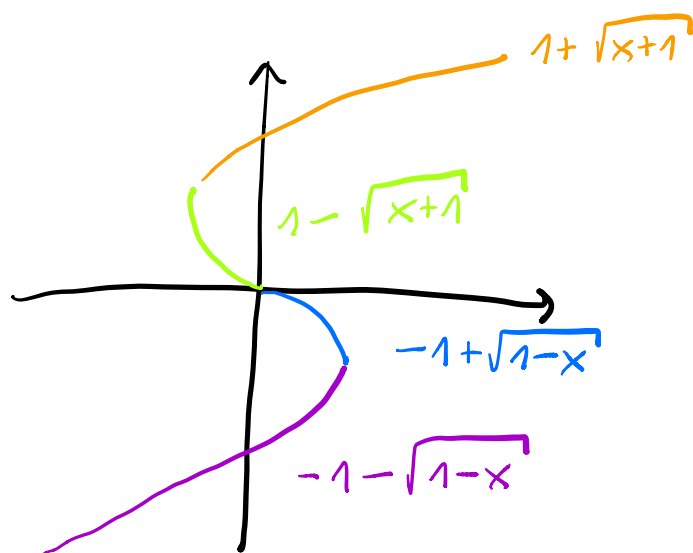
$$x = (y-1)^2 - 1$$

$$y = \pm \sqrt{x+1} + 1$$

$$x = -y^2 - 2y$$

$$-x = (y+1)^2 - 1$$

$$y = \pm \sqrt{1-x} - 1$$



NPR. PRVI PRIMER BI SE  
EKSPLICITNO ZAPISAL:

$$y = \begin{cases} -1 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x+1}, & x > 1 \end{cases}$$