Izračunaj odvod funkcije f.

(1) $f(x) = \frac{2^{3x}}{3^{x^2}}$

(2) $f(x) = \sin x^{\tan x}$

$$(\frac{2^{3x}}{3^{x^2}})' = \frac{(2^{3x})'3^{x^2} - 2^{3x}(3^{x^2})'}{(3^{x^2})^2} = \frac{2^{3x}\ln 2 \cdot 3 \cdot 3^{x^2} - 2^{3x}3^{x^2}\ln 3 \cdot 2x}{3^{x^2}3^{x^2}}$$
$$= \frac{2^{3x}(\ln 8 - \ln 9)}{3x^2}$$

$$(\sin x^{\tan x})' = (e^{\ln(\sin x^{\tan x})})' = (e^{\tan x \ln(\sin x)})' = e^{\tan x \ln(\sin x)}(\tan x \ln(\sin x))'$$
$$= e^{\tan x \ln(\sin x)}(\frac{\ln(\sin x)}{\cos(x)^2} + \tan x \frac{\cos x}{\sin x}) = \sin x^{\tan x}(\frac{\ln(\sin x)}{\cos(x)^2} + 1)$$

Naj bo $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2x}{1-x^2})$.

(1) *Izračunaj g'.*

(2) *Skiciraj graf g.*

$$(\frac{1}{2}\arctan(\frac{2x}{1-x^2}))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{2x}{1-x^2})^2} \cdot \frac{2(1-x^2) + 2x2x}{(1-x^2)^2}$$
$$= \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

Opazimo, da je $g'(x) = \arctan'(x)$. S tem si bomo pomagali pri skiciranju grafa g, saj je graf funkcije arctan dobro znan. Prav tako za realni funkciji f, g velja $f'(x) = g'(x) \to g(x) = f(x) + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ konstanta. Preostane nam, da izračunamo C.

Vendar moramo biti previdni, saj definicijsko območje funkcije f ni enako $\mathbb{R}$, temveč je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Iz tega sledi (ker je funkcija arctan definirana povsod na realnih številih):

$$g(x) = \begin{cases} \arctan(x) + C_1, x < -1 \\ \arctan(x) + C_2, -1 < x < 1 \\ \arctan(x) + C_3, x > 1, \end{cases}$$

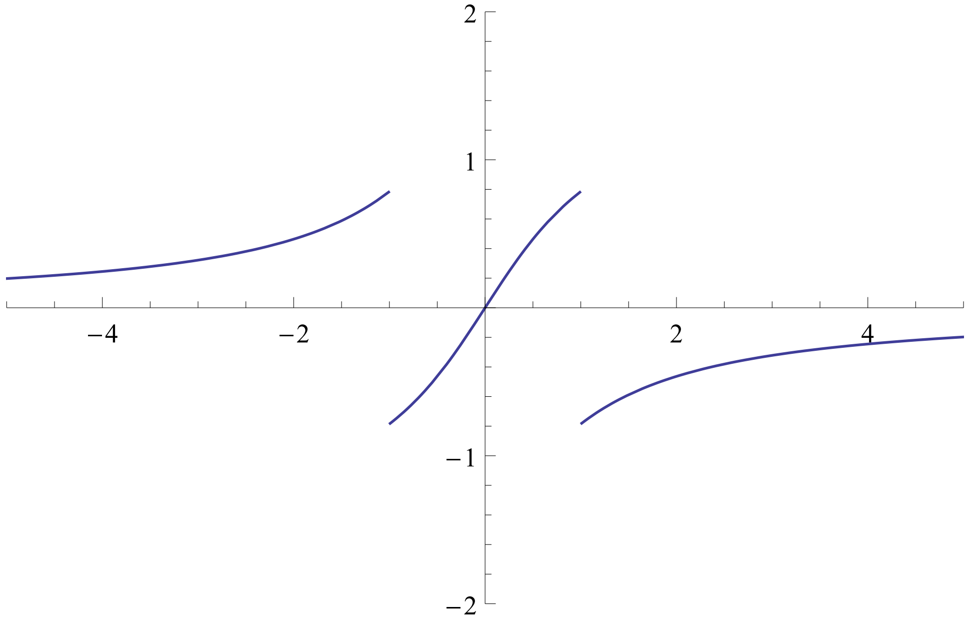
kjer se C_1, C_2 in C_3 lahko medsebojno razlikujejo. Izračunajmo jih:

$$C_1 = \lim_{x\to-\infty} g(x) - \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\arctan(\frac{2x}{1-x^2}) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

saj je $\lim_{x\to-\infty}(\frac{2x}{1-x^2}) = 0$. Podobno izračunamo

$$C_1 = \lim_{x\to\infty} g(x) - \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\arctan(\frac{2x}{1-x^2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

saj je $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x}{1-x^2}) = 0$. Ostane še $C_3 = g(0) - \arctan(0) = 0$



Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soda odvedljiva funkcija. Pokaži, da je f' liha funkcija.

Želimo videti, da je $f(-a) = -f(a)$ za vse $a \in \mathbb{R}$. Računamo po definiciji.

$$f'(-a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(-x) - f(a)}{x + a} \text{ (upoštevamo sodost } f)$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(-x) - f(a)}{-(-x - a)} = - \lim_{x \to -a} \frac{f(-x) - f(a)}{-x - a} = - \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

$-f'(a)$.

V zadnjem koraku smo uvedli novo spremenljivko $t := -x$.

Opomba: Na enak način pokažemo, da je odvod lihe realne odvedljive funkcije sod.

Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $(fg)^(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$.

Dokaz z indukcijo po n. Primer $n = 1$ je znano pravilo za odvod produkta. Sedaj predpostavimo, da velja $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ in računamo $(fg)^{(n+1)}$.

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= (\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)})' = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(n-k)}g^{(k)})' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)})
\end{aligned}
$$

Videti želimo, da je zgornja vsota enaka $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}g^{(k)}$. To storimo s primerjavo koeficientov pred $f^{(n+1-k)}g^{(k)}$ v obeh vsotah za $k = 0, 1, \cdots, n+1$. V zgornji vsoti je koeficient pred $f^{(n+1)}g$ (primer $k = 0$) enak $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, tako kot v drugi. Koeficient pred $fg^{(n+1)}$ (primer $k = n+1$) je (že zaradi simetrije med f in g) prav tako enak $1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1}$.

Za $k = 1, \ldots, n$ pa vidimo, da je koeficient pred $f^{(n+1-k)}g^{(k)}$ v prvi vsoti enak $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (Pascalova identiteta), kar je ravno koeficient $f^{(n+1-k)}g^{(k)}$ v drugi vsoti.

Enakost vsot je s tem pokazana.

Izračunaj limite.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, $n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{x\downarrow 0}\ln x\ln(x+1)$

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0,
$$

pri čemer n-krat uporatimo L'Hôpitalovo pravilo.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 0}\ln x\ln(x+1) &= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} -\frac{1}{x+1}(x(\ln x)^2) \\
&= -\lim_{x\downarrow 0} x(\ln x)^2 = -\lim_{x\downarrow 0}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} -\lim_{x\downarrow 0}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= 2\lim_{x\downarrow 0} x\ln x = 2\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} -2\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -22\lim_{x\downarrow 0} x = 0
\end{aligned}
$$

Naj bo $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$. Razširi f do zvezne funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ali je f_1 odvedljiva? Je zvezno odvedljiva?

Ker je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, je f_1 enaka:

$$
f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}
$$

Očitno je $f_1'(x) = f'(x)$ za $x \neq 0$, torej je f_1 za take x odvedljiva.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 0.$$

Torej je f_1 odvedljiva tudi v nič. Toda ker $0 \neq \lim_{x\to 0} f_1'(x) = \lim_2 x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$, saj zadnja limita ne obstaja, f_1' ni zvezen v nič.

Naj bo $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realni polinom stopnje n, ki ima same realne ničle. Dokaži, da ima tudi p' same realne ničle.

Najprej rešimo nalogo za primer, ko ima p n različnih realnih ničel, ki jih označimo z $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Po Rollovem izreku za vsak $i = 1, \ldots, n-1$ obstaja ničla $y_i \in (x_i, x_{i+1})$. Torej ima p' vsaj $n-1$ različnih realnih ničel, ker pa je $n-1$ stopnja p', sklepamo, da ima p' same različne realne ničle.

Rešimo nalogo še za splošen polinom stopnje n z n realnimi, morebiti večkratnimi ničlami. Pišemo $p(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_l)^{k_l}$. Velja $k_1 + \cdots k_l = n$. Najprej pokažimo, da za vsak $i, 1 \leq i \leq l$ velja, da je x_i vsaj (v resnici točno toliko) $(k_i - 1)$-kratna ničla p'. Res, p lahko zapišemo v obliki $p(x) = (x - x_l)^{k_l} g(x)$, kjer je $g(x)$ polinom, ki v x_l nima ničle. Odvajamo in dobimo

$$p'(x) = k_l(x-x_l)^{k_l-1}g(x) + (x-x_l)^{k_l}g'(x) = (x-x_l)^{k_l-1}(k_l g(x) + (x-x_l)g'(x)).$$

Tako kot zgoraj iz Rolleovega izreka sledi, da za vsak i $p'(y_i) = 0$ za nek $y_i \in (x_i, x_{i+1})$. Število realnih ničel p' je torej vsaj $\sum_{i=1}^{l}(k_i - 1) + l - 1 = n - l + l - 1 = n - 1$, in ker je to enako stopnji p', je naloga rešena.