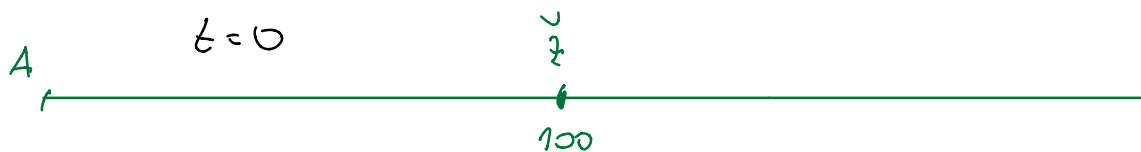


Šternske vrste

Primer: Ahil in Želazni krmurja v tlen.

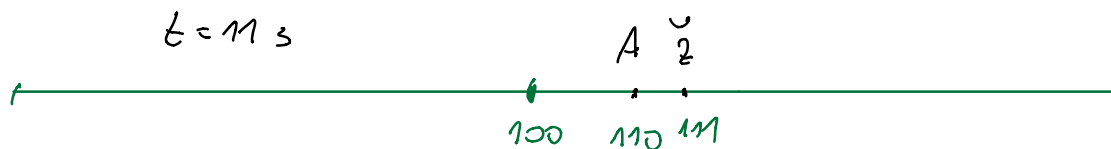
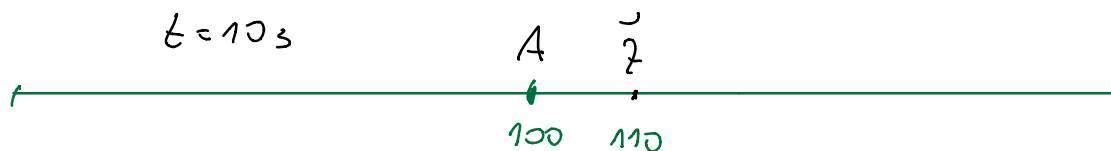
Želazni pravi: "Če mi bš 100 m fore (prednosti),
me ne bš nikoli ujel."

Želazni Ahila razlopa kake:



Ahila čas na 100 m : 10s

Želzin čas na 100 m : 100s



...

$t = 11,1$ Rezultati med A in B 10 cm

$t = 11,11$ " " 1 cm

⋮

Zaključki: V čas

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

sem res čas pred t₀. Iz čas je sestavljen neskončno mnogo pozitivnih časov.

Ker je neskončno summandov, je vsota neskončna.

Zaključki: neskončno dolg čas sem pred t₀.

Od cca. 17.-18. stoletja naprej vem, da vsake neskončno mnogo pozitivnih števil ni majno neskončna.

Definicija Niz bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ neta zpreslje.
 Temu zpresljo priredimo novo zpreslje
 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podano s predpisom

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$$\vdots$$

To zpreslje se imenuje zpreslje delnih vsot
 zpreslje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Primer: $\left\{ \left(\frac{1}{10} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

Zpreslje delnih vsot $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lize zpreslje je
 k'isko zpreslje 0,500, o k'le en prvi delu.

$$s_1 = \frac{1}{10}$$

$$s_2 = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10} \right)^2$$

$$s_3 = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

⋮

$$s_n = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

⋮

Zapišemo v decimalni obliki:

$$s_n = 0, \underbrace{111\dots 1}_n.$$

Vsaka vsota v zaporedju delnih vsot je "daljša".

Ko gre $n \rightarrow \infty$, gre s_n proti vsoti vseh členov zaporedja $\{a_n\}$.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

⋮

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$$

⋮

$$s_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots$$

Definicija Imajmo zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in naj bo $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje delnih vsot zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Če zaporedje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergira** in je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S,$$

potem pravimo, da je S vsota vseh členov zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. S se imenuje tudi vsota iz členov zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Pišemo

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Torej :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Opozicija: Označe S_n mi r uprosti.

Opozicija: $\bar{G}$ izražava $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne konvergira, po čemu isto člena izražava $\{a_n\}$ ne obstaja. (vostka ne obstaja)

Pomenben primer:

Geometrijska vrsta:

Izrazimo geometrijsko izražajo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = a q^{n-1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & aq & aq^2 & aq^3 & , \dots & aq^{n-1} & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & a_n & \dots \end{array}$$

Ali obstaja isto vseh člena izražajo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} =$
 $= \{a q^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$?

Ogledati si nismo zaporedje danih vsot:

$$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad ; \quad s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

Nas pri cili: poiskati enotno kompaktno
fornulo za s_n

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ q s_n &= aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \end{aligned}$$

$$s_n - q s_n = a - aq^n$$

$$s_n(1-q) = a(1-q^n)$$

$$s_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$$

Zanimanje nas: ali ima zaporedje

$$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ a \frac{1-q^n}{1-q} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

limito.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^{n+1}}{1-q} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-q} (1-q^{n+1}) = \\
&= \frac{a}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^{n+1}) = \\
&= \frac{a}{1-q} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} \right) = \\
&= \frac{a}{1-q} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Torej: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ obstaja natanko tisto, ko obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ - 2 sta izjema.

Trditev: Če je $|q| < 1$, potem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Če je $|q| > 1$, potem zaporedje $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergira (nima limite).

$|q| = 1$; a: $q = +1$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$
b: $q = -1$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ ne obstaja.

Dokaz: Dokazati treba samo konvergenciju i pritom $|z| < 1$,
ostalo je očito.

Dokazujemo: 0 je limita $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Taj: $\forall \varepsilon > 0$ nađemo, najti: $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
takvo da za veće vrijedi

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |0 - z^n| < \varepsilon$$

$$|0 - z^n| = |z^n| = |z|^n$$

$$\text{Kadji ho } |z|^n < \varepsilon \quad (1)$$

korj logaritman monotonizirajuća funkcija iz (1)
dobijemo

$$\ln(|z|^n) < \ln(\varepsilon)$$

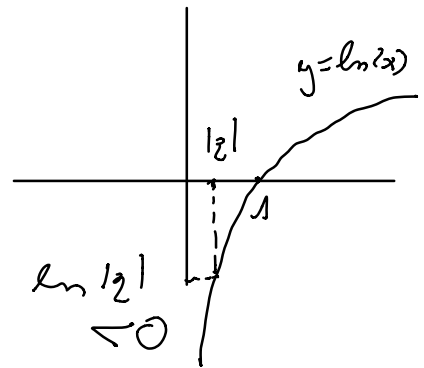
$$n \ln |z| < \ln(\varepsilon) \quad /: \ln |z|$$

sposobno se
 $|z| < 1$
zato $\ln |z| < 0$

Tagi: $n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}$

Zle je me iskan n_ε

$$n_\varepsilon = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \right\rfloor$$



Za vsak $\varepsilon > 0$ smo našli n_ε , torej smo dosegli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0 \quad \text{za } |q| < 1$$

Spomnimo se izpovedi $\{s_n\}$ dveh ust geom. izpovedi. Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \\ &= \frac{a}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}) = \\ &= \frac{a}{1 - q} \end{aligned}$$

Try

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a q^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a q^k = \frac{a}{1-q}$$