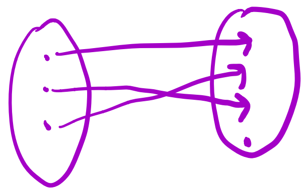
NALOGA:

(a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$

DOLOČI D_f IN POKAŽI, DA JE FUNKCIJA INJEKTIVNA.
DOLOČI NJEN INVERZ.

(a) D_f: $x \neq -1$ t.j. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

SPOMNIMO:



INJEKTIVNOST POMENI, DA IMA VSAK ELEMENT SVOJO SLIKO.

DVE EKVIVALENTNI DEFINICIJI:

~ $f: A \to B$ JE INJEKTIVNA, ČE ZA $a \neq b$ VELJA $f(a) \neq f(b)$.

~ $f: A \to B$ JE INJEKTIVNA, ČE IZ $f(a) = f(b)$ SLEDI $a = b$.

MI UPORABIMO DRUGO DEFINICIJO: NAJ VELJA

$$f(x) = f(y)$$

$$\frac{3x-2}{x+1} = \frac{3y-2}{y+1}$$

$$3\cancel{xy} - 2y + 3x \cancel{-2} = 3\cancel{xy} - 2x + 3y \cancel{-2}$$

$$5x = 5y$$

$$x = y$$

TO JE BIL ŽELENI SKLEP!

POIŠČIMO INVERZ Z ZAMENJAVO VLOG x IN y:

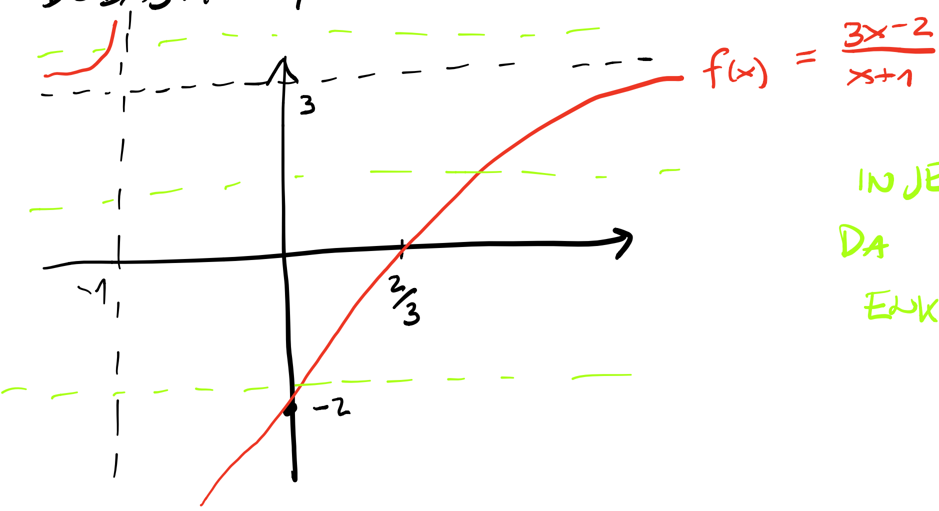
$$x = \frac{3y-2}{y+1} = f(y)$$

$$xy + x = 3y - 2$$

$$y(x-3) = -x-2$$

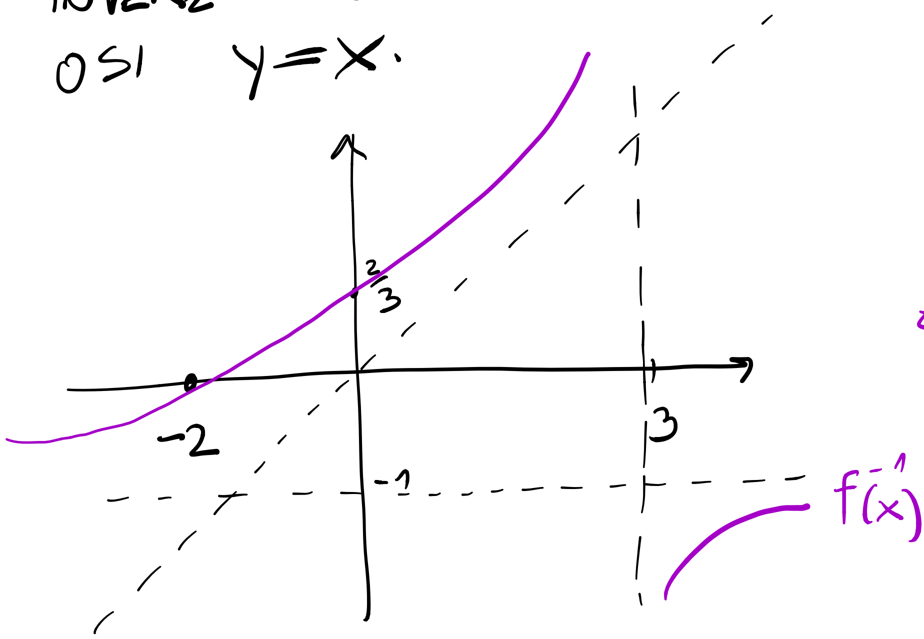
$$y = \frac{x+2}{3-x} = f^{-1}(x)$$

DODAJMO GRAFIČNO INTERPRETACIJO:



INJEKTIVNOST POMENI, DA VODORAVNICA NAJVEČ ENKRAT SEKA GRAF

INVERZ DOBIMO Z ZRCALJENJEM PREKO OSI $y=x$.



OPAZIMO ZVEZO:

$$D_{f^{-1}} = Z_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$Z_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

(b) $g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$

D_g: $\frac{x-3}{2} > 0$ ZARADI LOGARITMA

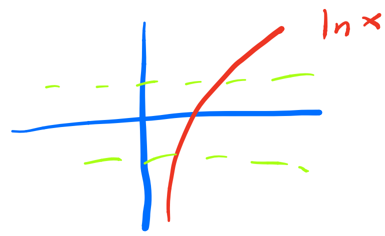
$x \in (3, \infty)$.

INJEKTIVNOST:

$$g(x) = g(y)$$

$$\ln\left(\frac{x-3}{2}\right) = \ln\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

LAHKO ANTILOGARITMIRAMO, KER JE ln INJEKTIVEN.



$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} \quad / \cdot 2$$

$$x - 3 = y - 3$$

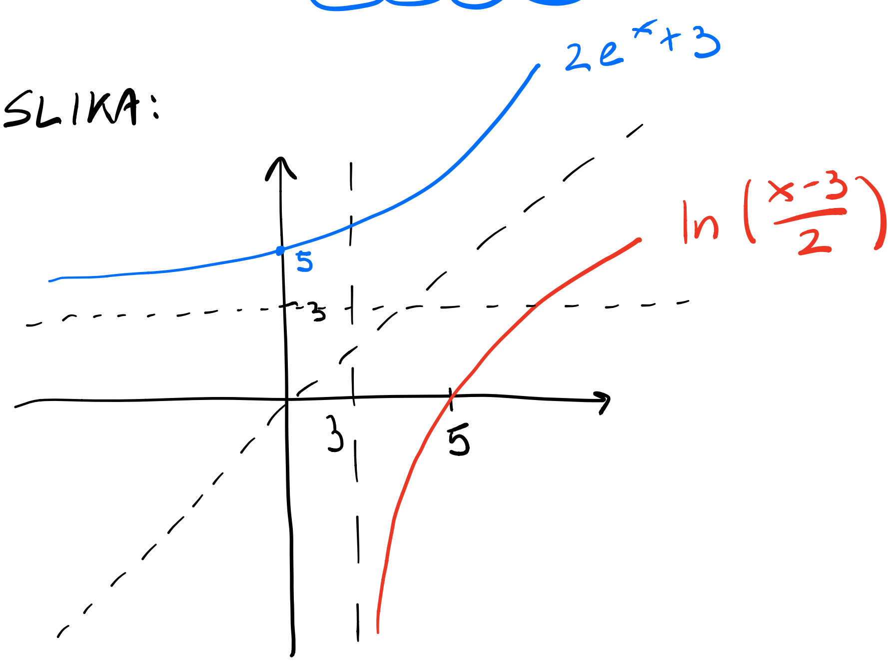
$$x = y$$

INVERZ: $x = \ln\left(\frac{y-3}{2}\right)$

$$e^x = \frac{y-3}{2}$$

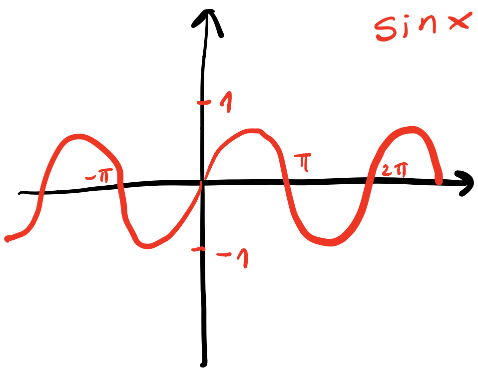
$$y = 2e^x + 3$$

SLIKA:

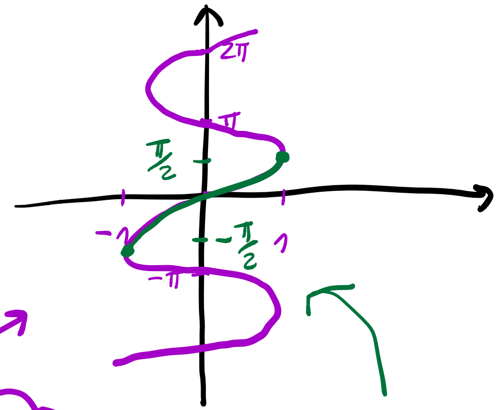


DEFINICIJA KROŽNIH FUNKCIJ

POD IMENOM 'KROŽNE FUNKCIJE' RAZUMEMO INVERZE KOTNIH FUNKCIJ, KI REALNEMU ŠTEVILU PRIREDIJO 'KOT' V RADIANIH.



ZRCALIMO ČEZ $y=x$

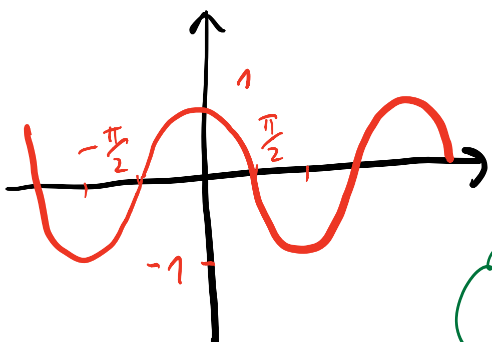


PROBLEM: TO NI DOBRO DEFINIRANA FUNKCIJA, SAJ VSAKEMU $x \in [-1,1]$ PRIREDI ŠTEVILNO MNOGO KOTOV.

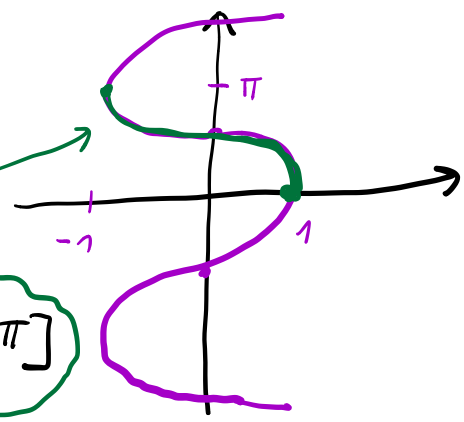
REŠITEV: ZOŽIMO ZALOGO VREDNOSTI IN SE OMEJIMO NA $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

DOBIMO: $f(x) = \arcsin x$, $D_f = [-1,1]$, $Z_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

PODOBEN POSTOPEK PONOVIMO ZA $\cos x$ IN $\operatorname{tg} x$.

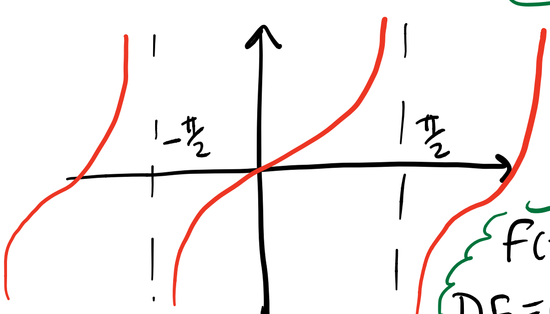


ZRCALIMO

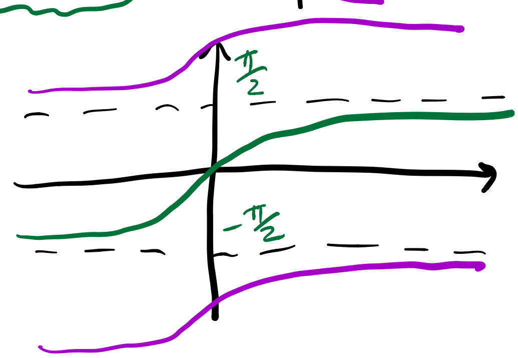


$f(x) = \arccos x$

$D_f = [-1,1]$, $Z_f = [0, \pi]$



ZRCALIMO



$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

NALOGA: DOLOČI D_f IN Z_f TER SKICIRAJ GRAF:

(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$

(b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$

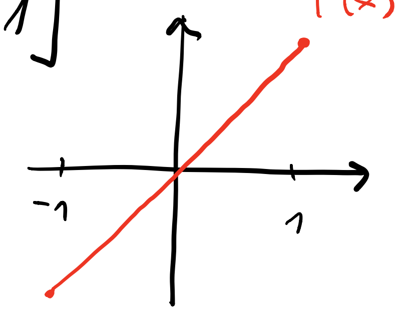
(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$

V ARKUS SINUS LAHKO VSTAVIMO LE $x \in [-1, 1]$. DOBIMO VREDNOSTI NA INTERVALU $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ZA KATERE JE SINUS DEFINIRAN IN SLIKA NA $[-1, 1]$.

t.j. $D_f = [-1, 1]$, $Z_f = [-1, 1]$

$$f(x) = \sin(\arcsin x) = x$$

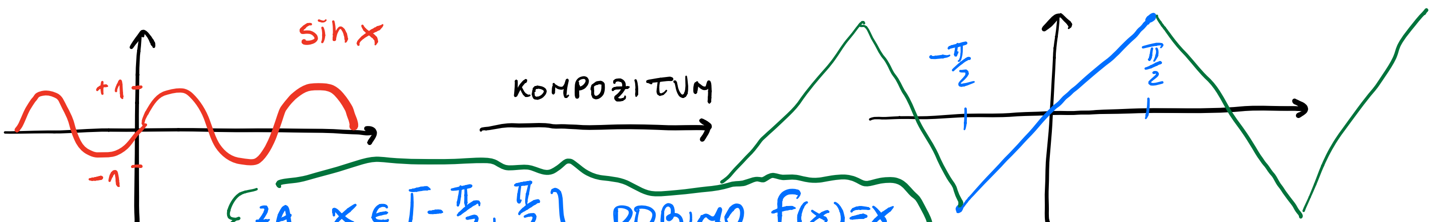


(b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

V SINUS LAHKO VSTAVIMO VSAK $x \in \mathbb{R}$ IN DOBIMO VREDNOSTI MED $[-1, 1]$, ZA KATERE JE TUDI ARKUS SINUS DEFINIRAN IN SLIKA V $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad Z_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

KAKŠEN JE GRAF ZA f?



ZA $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ DOBIMO $f(x) = x$, NATO GRAF DOPOLNIMO

SKLEP: $\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$

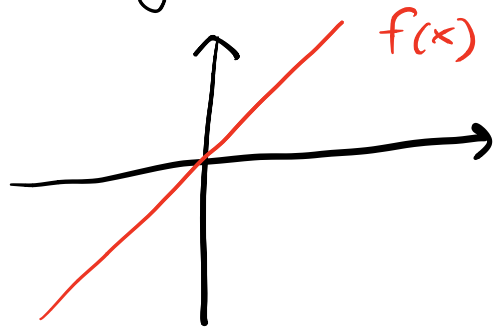
VSE OSTALE VREDNOSTI PA DOLOČA PERIODIČNOST SINUSA.

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$

ARKUS TANGENS SPREJME $x \in \mathbb{R}$ IN VRNE $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. TAM JE DEFINIRAN TUDI tg, KI SLIKA NA $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R} = Z_f$

$f(x) = x$

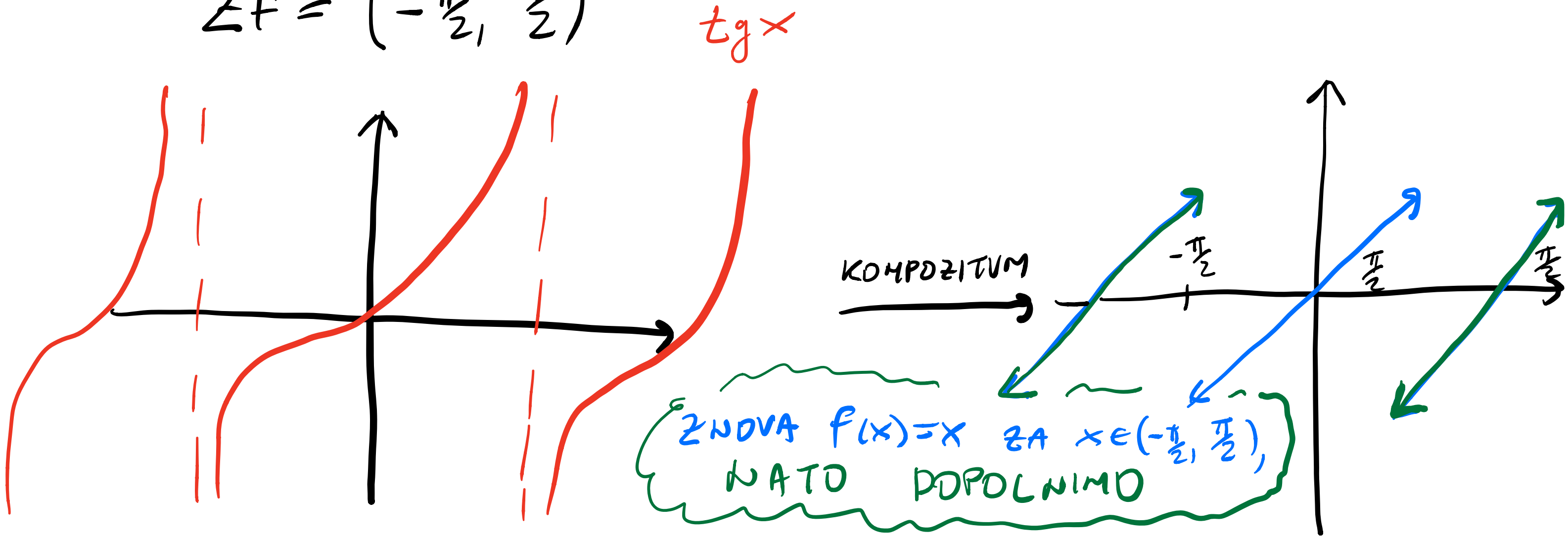


(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

TANGENS JE DEFINIRAN ZA $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, VRNE PA $\mathbb{R}$. ARKUS TANGENS GA SLIKA V $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$Z_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

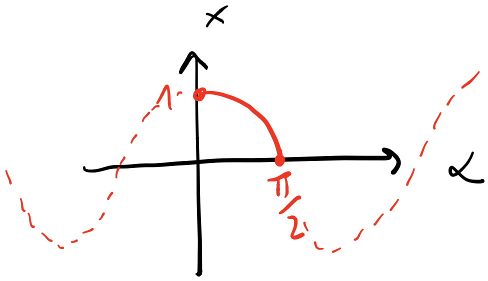


NALOGA: DOKAŽI, DA VELJA:

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & x \in [0,1] \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,0) \end{cases}$$

NASVET: UPORABI ZVEZO $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

NAJ BO $x \in [0,1]$. POTEM GA LAHKO ZAPIŠEMO KOT $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. TEDAJ JE



$$\arccos x = \arccos(\cos\alpha) = \alpha$$

(PODOBNO KOT PRI (b) IN (d) IZ PREJŠNJE NALOGE JE $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ ZA $\alpha \in [0,\pi] = Z_{\arccos}$)

PO DRUGI STRANI IMAMO:

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arcsin\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= \arcsin\sqrt{\sin^2\alpha} = \arcsin(|\sin\alpha|) =$$

$$= \arcsin(\sin\alpha) = \alpha$$

KER $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$ IN $\sin\alpha \geq 0$

KER $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}] \subset Z_{\arcsin}$

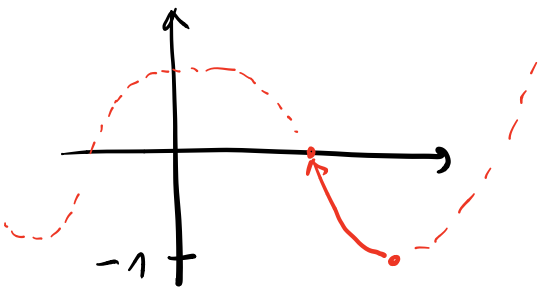
SKLEP:

$$\arccos x = \alpha = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

ZA VSE $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2}]$ oz. $x \in [0,1]$.

SEDAJ NAJ BO $x \in [-1, 0)$. POTEM JE

$x = \cos\alpha$, $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$. ZNOVA VELJA:



$$\arccos x = \arccos(\cos\alpha) = \alpha$$

KER $\alpha \in Z_{\arccos}$

VENDAR PA TOKRAT DOBIMO:

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arcsin(|\sin\alpha|) =$$

$$= \arcsin(\sin\alpha) = \pi - \alpha$$

ZA $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ JE $\sin\alpha \geq 0$

PREJŠNJA NALOGA (b)

SKLEP:

$$\arccos x = \alpha = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

ZA VSE $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ oz $x \in [-1, 0)$.