

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
10. VAJE: 7. 12. 2020

1. Reši enačbo

$$\det \begin{bmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2x+6 \\ x+1 & x+5 & 6 & 2x+8 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 0.$$

2. S Cramerjevim pravilom reši sistem

$$x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -10$$

$$9x_2 + 2x_3 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

3. Ali je grupoid, polgrupa, monoid, grupa? Ali je operacija komutativna?

$$(\{0\}, +), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{N}, *), (\mathbb{N}_0, *), (\mathbb{R}^3, \times), (M_n(\mathbb{R}), +), (M_n(\mathbb{R}), *)$$

4. Pokaži, da je množica vseh preslikav $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoid za kompozicijo.

Pokaži, da ima

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ n - 1 & ; n \geq 2 \end{cases}$$

desni inverz (neskončno desnih inverzov) ne pa tudi levega.

5. Podmnožica H (pol)grupe $(G, \cdot)$ je pod(pol)grupa, če je H (pol)grupa za isto operacijo. Naj bo M monoid. Pokaži, da množica vseh obrnljivih elementov v M podpolgrupa, ki je tudi grupa.
6. Pokaži, da je $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ grupa za matrično množenje. Kaj pa $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ in $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid |\det(A)| = 1\}$?
7. Zapiši vse možne tabele množenja grupe z 2/3/4/5 elementi.
8. Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$$

permutaciji.

Zapiši α, β kot produkt disjunktnih ciklov.

Izračunaj red α in β .

9. Pokaži, da S_3 ni komutativna.

$$\overset{0}{\#} \overset{p(x)=0}{\mathbb{C}} \det \begin{bmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2x+6 \\ x+1 & x+5 & 6 & 2x+8 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 0.$$

1. Izračunamo determinanto $\rightarrow$ izračunamo ničle polinoma

2. Pogledamo za katere x matrika ni obrnljiva

3. Razberemo razcep polinoma na linearne/kvadratne faktorje

$$\overset{-p(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2x+6 \\ x+1 & x+5 & 6 & 2x+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \overset{-\frac{1}{2}p(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ x & x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1}$$

$$-\frac{1}{2}p(x) = -\frac{1}{2}(1-x)q_1(x) = 0$$

$$\overset{q_1(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ x & x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \overset{q_1(x)=(x+1)q_2(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 0 & x-1 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ x & x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix} = (1-x) \overset{+1}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

$$\overset{-q_2(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ x & x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix} = (x+1) \overset{q_2(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ x & x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-q_2(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ x+5 & 6 & x+8 \end{bmatrix} \rightarrow \overset{q_2(x)=0}{\det} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ x+5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3} \overset{\text{Ničle}}{\det} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ x-1 & 0 \end{bmatrix} = -2(x-1)$$

$$\det [\text{začetna}] = c(x+1)(x-1)^2 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_{1,5} = 1 \rightarrow \text{dvojna} \end{matrix}$$

za vse $c \in \mathbb{R}$

$$x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -10$$

$$9x_2 + 2x_3 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$A_i = A$ i-ti stolpec
zamenjamo z b

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \det \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \end{bmatrix} = 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$8 \det \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -88 \quad A_1 = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 7 \\ 7 & 9 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = -176 = -2 \cdot 88 \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} -88$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 88 \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A - obrnljiva matrika $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ - prirejenka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A)_{ij} = \det(A^{ji})$$

$A^{ji} = A$ i-ti stolpec zamenjamo z e_j

V splošnem $A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I$ tudi če A ni obrnljiva
 $\downarrow$ identitena matrika

3. Ali je grupoid, polgrupa, monoid, grupa? Ali je operacija komutativna?

$$(\{0\}, +), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{N}, *), (\mathbb{N}_0, *), (\mathbb{R}^3, \times), (M_n(\mathbb{R}), +), (M_n(\mathbb{R}), *)$$

Grupoid - množica z binarno operacijo

$$\tau: A \times A \rightarrow A \quad \tau(a, b) - \text{ponovadi: pišemo } ab, \text{ če je pomen jasen iz konteksta.}$$

Polgrupa - grupoid z asociativno operacijo

$$(ab)c = a(bc)$$

Monoid M - polgrupa z enoto

$$\exists e \in M \forall a \in M: ea = ae = a$$

↓
enota

Enota je enolična

e_1, e_2 - enoti

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2$$

Grupa - monoid kjer so vsi elementi obrnljivi.

$$\forall e \in G \quad \forall g \in G \exists h \quad gh = hg = e$$

enota

Inverz je enolično določen

$$\begin{array}{c} h_1, h_2 \text{ inverza} \\ (h_1 g h_2 = h_1 g h_2) \\ \parallel \quad \parallel \\ e h_1 \quad h_2 e \\ \parallel \quad \parallel \\ h_2 = h_1 \end{array}$$

Če uporabljamo multiplikativen zapis, enoto pogosto označimo z 1.
Inverz g potem označimo s g^{-1} .

Abelova grupa - grupa s komutativno operacijo

$$\forall g, h \in G \quad gh = hg$$

V abelovih grupah operacija pogosto označimo s $+$ (aditiven zapis)
Potem enoto označimo z 0, inverz g pa z $-g$.

$$(\{0\}, +), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{N}, *), (\mathbb{N}_0, *), (\mathbb{R}^3, \times), (M_n(\mathbb{R}), +), (M_n(\mathbb{R}), *)$$

↓

→ trivialna grupa.

$$(\{0\}, *) \rightarrow \text{označi operacijo in simbol ni sta pomembna}$$

$$0 * 0 = 0$$

$$(\mathbb{N}, +) - \text{polgrupa}$$

$$(\mathbb{N}_0, *) - \text{monoid enota je 1}$$

$$(\mathbb{N}_0, +) - \text{monoid enota je 0}$$

$$(\mathbb{R}^3, \times) - \text{grupoid operacija ni asociativna}$$

vektorski produkt

$(M_n(\mathbb{R}), +)$ - ^(Abelova) grupa
kjer je ničelna matrica

$(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ - monoid
kjer je $I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

4. Pokaži, da je množica vseh preslikav $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoid za kompozicijo.

Pokaži, da ima

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ n-1 & ; n \geq 2 \end{cases}$$

desni inverz (~~nizbo ničelne desni inverz~~) ne pa tudi levega.

Enota je $\text{id}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\text{id}_{\mathbb{N}}(n) = n$.

Iščemo $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, da bo $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} 1 & ; g(n) = 1 \\ g(n)-1 & ; g(n) \geq 2 \end{cases}$$

$$f \circ g(1) = 1 \Rightarrow g(1) = 1 \text{ ali } 2$$

$$\text{za } n \geq 2 \quad f \circ g(n) = n \Rightarrow g(n) = n+1$$

$$\text{Imamo dva inverza } g_1, g_2 \rightarrow g_i(n) = \begin{cases} i & ; n = 1 \\ n+1 & ; n \geq 2 \end{cases}$$

Pokažimo, da f nima levega inverza.

$$\text{Daj bo } h \circ f = \text{id} \quad 1 = h \circ f(1) = h \circ f(1) = 2 \quad 1 \neq 2 \Rightarrow \text{ne}$$

V splošnem monoid velja, če ima g levi in desni inverz potem sta enaka. (g ima inverz)

$$h_1 g = g h_2 = e$$

$$(h_1 g) h_2 = e h_2 = h_2$$

$$h_1 (g h_2) = h_1 e = h_1$$

Iz tega lahko sklepamo, če ima f dva različna desna inverza, potem nima levega.

Primer

$$\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\gamma(n) = n+1$$

ima neskončno desnih inverzov

$$\text{Za } m \in \mathbb{N} \text{ je } \gamma_m(n) = \begin{cases} m & ; n = 1 \\ n-1 & ; n \geq 2 \end{cases}$$

desni inverz.

5. Podmnožica H (pol)grupe $(G, \cdot)$ je pod(pol)grupa, če je H (pol)grupa za isto operacijo. Naj bo M monoid. Pokaži, da množica vseh obrnljivih elementov v M podpolgrupa, ki je tudi grupa.
6. Pokaži, da je $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ grupa za matrično množenje. Kaj pa $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ in $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid |\det(A)| = 1\}$?

$$H \subseteq G \text{ (pol)grupa}$$

H je polpodgrupa, če je zaprta za operacijo
 $\forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$

H je podgrupa, če je zaprta za operacijo in inverz.
 $\forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$ in $a^{-1} \in H$ (Ekvivalentno $\forall a, b \in H$ je $a^{-1}b \in H$)

M -monoid 1-eوتا

$$N = \{m \in M \mid m \text{ je obrnljiv}\}$$

N je zaprt za množenje.

Če sta $a, b \in M$ in a^{-1}, b^{-1} njuna inverza (Tudi a^{-1} in b^{-1} sta obrnljiva)

potem je $b^{-1}a^{-1}$ inverz $a \cdot b \Rightarrow a \cdot b$ je obrnljiv $a \cdot b \in M$.

Vsak element v N je obrnljiv po definiciji $\Rightarrow N$ je grupa.

$$\begin{array}{l} \text{splošna linearna grupa} \\ \uparrow \\ GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \\ \text{specialna linearna grupa} \end{array}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

$$A, B \quad \det(A) = \det(B) = 1 \quad \det(AB) = 1 \Rightarrow A \cdot B \in SL_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$$

Tabela „množenja“ grupe

G - končna grupa (pisano multiplikativno)

$$G = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad |G| = n+1 - \text{moč grupe}$$

1	x_1	x_2	...	x_n
x_1	$x_1 x_1$	$x_1 x_2$	...	$x_1 x_n$
x_2	$x_2 x_1$	$x_2 x_2$	...	$x_2 x_n$
x_3	$x_3 x_1$	$x_3 x_2$	...	$x_3 x_n$
...	...	...	...	...
x_n	$x_n x_1$	$x_n x_2$	...	$x_n x_n$

$$(x_i x_j = x_k)$$

- V vsakem stolpcu se vsak element pojavi natanko enkrat
če se nek element ^{v istem stolpcu} pojavi dvakrat $x_j x_i = x_k x_i \Rightarrow x_j = (x_j x_i) x_i^{-1} = x_k x_i x_i^{-1} = x_k \Rightarrow j=k$
Torej se vsak pojavi največ enkrat. Ker je ravno $n+1$ mest se morajo pojaviti vsi. (ostaja tudi bolj direktan argument)
 $x_i = x_j (x_i^{-1} x_i) \quad x_i = (x_i x_i^{-1}) x_i$
- V vsaki vrstici se vsak element pojavi natanko enkrat
 $x_i x_j = x_i x_k \Rightarrow x_j = x_k$
če ne ostane noben praviček, da ima element red 0.
V končnih grupah nima noben element red 0.
- (ne povsem povezano) red elementa x je najmanjši $n \in \mathbb{N}$ zn katerega je $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_n = 1$
red elementa | moč grupe (velja samo za končne grupe)
deli

Naj bo $|G| = 2$

$$G = \{1, a\} \quad \text{lahko uporabimo tudi kakšne druge simbole}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline a & 1 \end{array} \quad (\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \leadsto \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array})$$

Tabela „seštevanja“
grupa ostankov pri deljenju z 2.
operacija (modularna) seštevanja.

Naj bo $|G| = 3$

$$G = \{1, a, b\} \quad \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & a & b \\ \hline a & b & 1 \\ b & 1 & a \end{array} \quad \begin{array}{l} a \cdot a = 1 \text{ ali } b \\ \text{če je } a \cdot a = 1 \text{ potem je red } a = 2 \\ 2 \cdot 3 = |G| \\ a \cdot b = a \cdot a \cdot a = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \leadsto \text{ista tabela samo drugi simboli}$$

$|G| = 4$

$$G = \{1, a, b, c\}$$

1	a	b	c
a	1	c	b
b	c	1	a
c	b	a	1

Če b preimenujemo v c,
c v b in prevedemo
tabela iz 2 dobimo /
(in obratno)

1. možnost

$$a \cdot a = 1$$

$$b \cdot b = 1 \text{ ali } a$$

2. možnost

$$a \cdot a \neq 1$$

$$a \cdot a = b \text{ ali } c$$

če reberemo

c, lahko c preimenujemo

v b in zamenjamo

vrstici. (in smo na istem

kot če reberemo b

1	a	b	c
a	b	c	1
b	c	1	a
c	1	a	b

$$a \cdot b = a \cdot a \cdot a \neq 1 \quad \begin{array}{c} 3 \cdot 4 \\ 12 \\ 12 \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

$\mathbb{Z}_4$

$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Edina tabela za grupe moči 5 je tabela „seštevanka“ $(\mathbb{Z}_5, +)$

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

↓
za $a \in G$ so elementi

$a, aa, a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a, a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 1$

so različni.

$G = \{1, a, a^2, a^3, a^4\}$

Spodnja $a^i \mapsto i$ obliko ustrezno tabelo za $\mathbb{Z}_5$

za $|G| = 6$ je več možnosti.

Kako iz tabele vidimo, da je grupa abelova? (zrcalnost čez diagonalo)

Če je $|G| = p$ - prva število potem, obliko samo $\mathbb{Z}_p$.