

Številске vrste - nabhjevanje

Nabhjevanje smisla izladi: Vrsta je geometrijsko
zaporedje $\{a q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ obstaja (konvergira),
če je $|q| < 1$.

Vrednost smisla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a q^{k-1} = \frac{a}{1-q}$$

Primeri Spominimo se Alibiz iñ Želje:

$$a = 10 \quad q = \frac{1}{10}$$

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$$

- geometrijsko zaporedje,

$$\text{za } k \in \mathbb{N} \quad a = 10, \quad q = \frac{1}{10}$$

Pa možemo formulu za Alibi iñ Želje u ovom

$$T = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} \text{ s} = \frac{10}{\frac{9}{10}} = \frac{100}{9} \text{ s}$$

$$= 11,1111\dot{1} \dots$$

$$= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Torej vidimo $T < 12$

Torej, s pomirjajo, čemur številskele raste
vidamo, da se želimo moči,

Lahko je videti, da neskončno raste geometrijskega
zaporedja $\{a q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $|q| > 1$ *ne*
obstaja.

Primer: $q = 2$ $a = 1$

1, 2, 4, 16, 32, 64, ...

Kaj pa $q = -2$?

$$|z| < 1 \quad |z| = 1$$

Geometrijski zaporedji sta v tem primeru:

$$z = +1$$

$$a, a, a, a, a, a, \dots$$

$$s_n = na \rightarrow \infty. \quad \text{Ne obstaja};$$

$$z = -1$$

$$a, -a, a, -a, a, \dots$$

$$a - a + a - a + a - a + \dots \quad \sum = 0$$

Videl! Same, da
to ni res.

Večje manjši naslednji reke:

Izrek: Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Testi več: Izpusti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergenca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Dokaz: Spominamo ε . Konvergenca $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomeni,
da znesemo delni vsoti $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergirajo in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Pišemo na kratko:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

Po definiciji limita znesemo, da $\forall \varepsilon > 0$ obstaja
 $\tilde{n}_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, da kakor koli velja

$$n > \tilde{n}_{\varepsilon} \Rightarrow |S - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poltem seresh velja tudi:

$$|S - s_{m+n}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tedy imamo:

$$|s_{m+n} - s_n| = |(s_{m+n} - S) + (S - s_n)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|s_{m+n} - S|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|S - s_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Indukcija: $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$
 $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Tad: $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$

Vidimo: Za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\tilde{n}_\varepsilon$, tako da važi

$$n > \tilde{n}_\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon$$

To je po znači $|a_{n+1} - 0| < \varepsilon$, tad vidimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

□

Vprašanje je bilo: Dokazati, da za $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ali tad možda tako zapravo nismo konvergencije?

Ali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$?

Odgovor: **Ne**

Primeri: Harmonično zaporedje

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Ali obstaja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots ?$$

Dokazati bomo, da ta vrsta ne obstaja. Že skupni
beseleži, dokazati bomo, da limita

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ne obstaja

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Spomnimo se: Vsaka Cauchyjeva zaporedja je
konvergentna. Seveda pa je res tudi obratno.

Vsaka konvergentna zaporedja je Cauchyjeva. Torej:

če zaporedje **ni** Cauchyjevo potem tudi **ni**
konvergentno.

Določimo to: N_j to $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergenčno
 zaporedje $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

N_j to $\varepsilon > 0$ po želji: Torej obstaja $\tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
 da zanj velja:

$$n > \tilde{n}_\varepsilon \Rightarrow |B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Torej tudi za vsake $p \in \mathbb{N}$ velja:

$$n+p, n > \tilde{n}_\varepsilon \Rightarrow |B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ in } |B - b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sedaj pa imamo: $n+p, n > \tilde{n}_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 |b_{n+p} - b_n| &= |b_{n+p} - B + B - b_n| \leq \\
 &\leq \underbrace{|b_{n+p} - B|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|B - b_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Torej: določeni smo: Za $\forall \varepsilon$ obstaja $\tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$,
 kto to velja

$$n \geq \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow |b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$$

(Droptail expirations:

$$m, n \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow |b_m - b_n| \leq 2$$

Dokazali smo: $\widehat{G}$ je reprezentativno, je tudi Lascayjevo.

Vantagens de 1/2 Harmonizáveis e expansíveis.

Polkovično bomo, da zapišete delo kot harmonična

Exponenja ni Cauchy jins. Iki kuli ni:

konvergenz:

Oftigast er $|s_{n+p} - s_n|$; p l m j  p
 p stetis veliks m rums st r s, m r n ls izh ns
 m rums st r s;

$$|S_{m+p} - S_m| = \sum_{k=1}^{m+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)\dots(n+p-1)(n+p) + (n+1)(n+3)\dots(n+p-1)(n+p) + (n+1)(n+2)(n+4)\dots(n+p) + \dots}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p)}$$

$$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p-1)$$

$$> \frac{p (n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{p}{n+p}$$

Torej;

$$|s_{n+p} - s_n| > \frac{p}{n+p}$$

Seveda velja: $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{n+p} = 1$ za vsake n .

To pa pomeni: če vzamemo še tako velike n ,
 lahko dobimo tako p , da bo $|s_{n+p} - s_n| > \frac{p}{n+p}$
 poljubno blizu 1. To pa pomeni, da ni ϵ
 to majhno, da bi bilo $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$! To pomeni: zaporedje
 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oblik vsaj harmoničnega zaporedja ni
 Cauchyeva in zato tudi ni konvergentno.

T_n - harmonične vrste ne obstoj.

Vidimo: Pgpj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je potreben
pgpj za obstoj vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ni pa k pgpj
za obstoj.

Dodati je treba še kakšen drug pogoj:

Najpomembnejši dodatni pogoj so zbiranje, da zbiranje
dobro hitro pride proti 0. (Npr. harmonično
pride prepočasi proti 0.) Pomemben dodatni
pogoj skupine norve je **alternirajoče**.

Definicija: Zbiranje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je **alternirajoče**,
če za vsak n velja

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \text{za } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Izrek: Naj bo zbiranje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alternirajoče

in naj velja $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots \geq |a_n| \geq \dots$

$$\text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

kraker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedij konvergentna.

Dokaz: Pričemo s $a_1 > 0$.

Njako $m \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število. Tedaj:

$$s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} + a_{2m+1} \geq 0$$

To pomeni: zaporedje $\{s_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ je naraščajoče.

$$\text{Opomba: } s_{2m+2} = s_{2(m+1)}.$$

Dokazimo še, da $\{s_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ ni omejeno

Res:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2m} \\ &= a_1 - (|a_2| - |a_3|) - (|a_4| - |a_5|) - \dots - (|a_{2m-2}| - |a_{2m-1}|) \\ &\quad - |a_{2m}| \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

Torej $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ je res $\tilde{\text{mra\u0177uj\u00f3\u0107}}$ in
 nadv\u017etr omejeno, torej je po znani izreku
 konvergen\u010da zaporedj. Obk\u017eiz\u0161: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = S$$

Tudi mo: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Res:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 konvergen\u010da konvergen\u010da



tudi $\{s_{2n}\}$ konvergen\u010da imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \\ &= S + 0 = S \end{aligned}$$

Twój: Des celstos zupnety $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
konwergir $\text{ k } S$ - refu twój:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad - \text{obstaje}$$

□.