

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Primeri ekstremov funkcionalov

V tem predavanju bomo uporabili Euler-Langrangejevo metodo za rešitev nekaterih klasičnih optimizacijskih problemov.

- Veržnica
- Brahistokrona
- Geodetske krivulje

Primer 1: Verižnica

Raztegljivo verigo obesimo na dva droga različnih višin in jo pustimo, da prosto visi pod vplivom težnosti. Kakšno krivuljo dobimo?

Fizikalna izpeljava, ki jo prepustimo fizikom, sledi načelu, da je pri rešitvi dosežen minimum potencialne energije. Ustrezen graf $y(x)$ na intervalu $[a, b]$ z robnima vrednostima $y(a) = \alpha > 0$, $y(b) = \beta > 0$ minimizira integral

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Lagrangian $L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$ je neodvisen od x in problem se prevede na Beltramijevo identiteto:

$$L - y' L_{y'} = y \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \in \mathbb{R}.$$

Če pomnožimo z $\sqrt{1 + y'^2}$, dobimo

$$y = C \sqrt{1 + y'^2}, \quad C > 0.$$

Verižnica

To enačbo lahko rešimo parametrično z nastavkom

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sinh t, \quad y = C \sqrt{1 + \sinh^2 t} = C \cosh t.$$

Odvajajmo y po x :

$$\sinh t = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = C \sinh t \frac{dt}{dx} \iff \frac{dx}{dt} = C.$$

Odtod

$$x(t) = Ct + D, \quad y = C \cosh t = C \cosh \left(\frac{x - D}{C} \right).$$

Konstanti C, D določimo iz robnih vrednosti $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Te krivulje se imenujejo **verižnice (catenal curves)**. Osnovna verižnica je $y = \cosh x$, druge dobimo iz nje s premikom in raztegom.

Rotacijska ploskev v $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$, ki jo dobimo z rotacijo verižnice okrog x -osi, je **minimalna ploskev**, ki se imenuje **katenoida**:

$$y^2 + z^2 = \cosh^2 x.$$

Rjasta katenoida, najdena na dnu morja

Da je katenoida minimalna ploskev (to je ploskev, ki lokalno minimizira ploščino) je odkril **Leonhard Euler (1744)**. Katenoida je ena najpomembnejših primerov minimalnih ploskev v literaturi.



$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

Helikoid

Drugi osnovni primer minimalne ploskve je **helikoid (Archimedova spirala)**, ki ga dobimo, če premico vrtimo in obenem dvigamo s konstantno hitrostjo.



Primer 2: Brahistokrona (grško: brahistos kronos=najkrajši čas)

V ravnini $\mathbb{R}^2$ s koordinatama (x, y) sta dani točki

$$A = (a, a'), \quad B = (b, b'), \quad a < b, \quad a' > b'.$$

Naj bo $C \subset \mathbb{R}^2$ krivulja s krajišči A in B . Kroglica na začetku miruje v točki A , nato pa potuje po krivulji C od A do B pod vplivom gravitacije in brez trenja.

Naloga: poišči krivuljo C , pri kateri je čas potovanja $T = T(C)$ najmanjši. Ta problem je postavil in rešil **Johann Bernoulli (1697)**.

Smiselno je predpostaviti, da je iskana krivulja graf odvedljive funkcije

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad f(a) = a', \quad f(b) = b',$$

ki zadošča $f'(a) < 0$ in $f(x) < a'$ za vsak $a < x \leq b$ (v nasprotnem primeru ne bi nikoli dosegla točke B). Naj bo $(x(t), y(t)) \in C$ položaj točke v času $t \geq 0$, kjer je $(x(0), y(0)) = A$. Hitrost je $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ in skalarna hitrost je

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \dot{x}(t), \quad v(0) = 0.$$

Točka se giblje od leve proti desni, zato je $\dot{x} \geq 0$.

Enačba za čas potovanja

Zakon o ohranitvi energije ter predpostavka o breztrajnem gibanju pove, da je vsota kinetične in potencialne energije konstantna:

$$\frac{v(t)^2}{2} + gy(t) = \frac{v(0)^2}{2} + gy(0), \quad t \geq 0.$$

Ker je $y(t) = f(x(t))$, $y(0) = f(a)$, $v(0) = 0$, iz te in prejšnje enačbe sledi

$$v(t) = \sqrt{2g(f(a) - f(x(t)))} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \dot{x}(t) = \sqrt{1 + f'(x)^2} \frac{dx}{dt}.$$

Torej je

$$dt = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2g(f(a) - f(x))}} dx$$

in čas potovanja kroglice od začetne točke A do končne točke B je enak

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(a) - f(x)}} dx.$$

Iščemo torej funkcijo $y = f(x)$ na $[a, b]$ z danimi robnimi vrednostmi, pri kateri ta integral doseže najmanjšo vrednost.

Obnašanje v levem krajišču

Na tem mestu opazimo naslednje. Integral za T načeloma izgleda singularen v levem krajišču zaradi izraza $\sqrt{f(a) - f(x)}$ v imenovalcu. Singularen bi bil v primeru, ko bi veljalo

$$f(a) \geq f(x) \geq f(a) - O((x - a)^2),$$

$$\sqrt{f(a) - f(x)} \leq C|x - a|, \quad \frac{1}{\sqrt{f(a) - f(x)}} \geq \frac{1}{C|x - a|}.$$

Vendar ta primer ni realističen, saj bi pomenil neskončen čas potovanja kroglice.

Konkretno, iz enačbe za $v(t)$ bi dobili diferencialno neenačbo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2g(f(a) - f(x(t)))}}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \leq \frac{c|x(t) - a|}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \leq c|x(t) - a|$$

v okolici $t = 0$. Z integracijo neenakosti $\dot{x}(t) \leq c|x(t) - a|$ in upoštevanjem $x(0) = a$ sledi (kot v dokazu Grönwallove leme), da je $x(t) \equiv a$ edina rešitev. To pomeni, da kroglica ostane v mirovanju v levem krajišču.

Poenostavitev problema

Koordinate (x, y) lahko izberemo tako, da je $A = (0, 0)$. Z uvedbo spremenljivke $z = -y \geq 0$ problem prevedemo na iskanje minimuma integrala

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} dx$$

med zveznimi funkcijami $z : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $z(0) = 0$, $z(b) = z_0 > 0$, ki so zvezno odvedljive na $(0, b]$. Videli bomo, da ima rešitev v levem krajišču $x = 0$ vertikalno tangento (neskončen odvod). Lagrangian

$$L(z, z') = \sqrt{1 + z'^2} / \sqrt{z}$$

je neodvisen od spremenljivke x , zato se Euler-Lagrangejeva enačba reducira na Beltramijev pogoj

$$L - z' L_{z'} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} - z' \frac{z'}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = C \in \mathbb{R}$$

oziroma

$$z(1 + z'^2) = 2C \in \mathbb{R} \quad (\text{za neko drugo vrednost konstante}).$$

Rešitev problema brahistohrone

To enačbo rešimo parametrično z nastavkom

$$z' = \frac{dz}{dx} = \tan u, \quad 1 + z'^2 = 1 + \tan^2 u = 1/\cos^2 u$$

$$z = \frac{2C}{1 + z'^2} = 2C \cos^2 u = C(1 + \cos 2u)$$

$$-2C \sin 2u = \frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{du} = \tan u \frac{dx}{du}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{-4C \sin u \cos u}{\tan u} = -2C(1 + \cos 2u)$$

$$x = -C(2u + \sin 2u) + D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Če uvedemo parameter $\tau = \pi - 2u$ ter izberemo $D = \pi C$ (s tem zagotovimo, da je $x(0) = 0$), dobimo

$$x = C(\tau - \sin \tau), \quad z = C(1 - \cos \tau), \quad y = -z = C(\cos \tau - 1).$$

To je **cikloida**. Parameter $C > 0$ izberemo tako, da zadostimo robnemu pogoju $y(b) = y_0 < 0$ v desni točki intervala.

Primer 3: Krivulje najmanjše dolžine

Naj bo ploskev $S \subset \mathbb{R}^3$ podana kot graf

$$S = \{(x, y, z) : z = x^2/2\}.$$

Poišči pot najmanjše dolžino na S od $A(-1, 0, 1/2)$ do $B(1, 1, 1/2)$.

Glede na naravo problema je smiselno iskati minimum med potmi, ki vsako ravnino $x = \text{const}$ sekajo le enkrat, zato lahko privzamemo, da je y funkcija x , $y = y(x)$, $x \in [-1, +1]$. Tretja komponenta poti je

$$z(x) = x^2/2, \quad z'(x) = x.$$

Dolžina poti je

$$\mathcal{L}(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2 + x^2} \, dx.$$

Prirejani Lagrangian

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + x^2 + y'^2}, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

je neodvisen od y , zato se Euler-Lagrangejeva enačba reducira na

$$L_{y'}(x, y') = C \in \mathbb{R}.$$

$$L_{y'}(x, y') = \frac{y'}{\sqrt{1+x^2+y'^2}} = C$$

$$y'^2 = C^2(1+x^2+y'^2)$$

$$y' = c\sqrt{1+x^2}, \quad c = C/\sqrt{1-C^2}.$$

$$y(x) = c \int_{-1}^x \sqrt{1+t^2} dt, \quad y(1) = c \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = 1.$$

Slednja enačba določi konstanto c .

Izračun integrala

$$t = \sinh u, \quad dt = \cosh u \, du$$

$$\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{\cosh^2 u} = \cosh u$$

$$\sqrt{1+t^2} dt = \cosh^2 u \, du = \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2) du$$

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{8}(e^{2u} - e^{-2u} + 4u) = \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{u}{2} + C.$$