

Številске vrste - matematičari (3)

Primer alternirajuće vrste:

Alternirajuća harmonična vrsta

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Po zgorij (u prejšnjem predavanju) dokazanem izreku ta vrsta **obstaja**.

Proti kateri leki bomo videli (izračunali)

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Pomembna opomba: Izreki o konvergenci alternirajuće vrste velja preveriti ali splošno.

Nj bo zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kls, da obstaja $N \in \mathbb{N}$ in da velja za vsa $n \geq N$:

$$1.) |a_n| \geq |a_{n+1}| \geq \dots \geq |a_{n+m}| \geq \dots$$

2.) $n \geq N$ $a_n a_{n+1} < 0$ (alternirne).

Potem vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obstaja.

Dokaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

končno število,
ker je vsota končno mnogo
končnih števil

obstaja po prej
izreku.

Zgornji sumi izdeli: obstaja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa
ne obstaja.

Obratno pa imamo:

Trilema: Nj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tako zaporedje, da
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ obstaja. Tedaj obstaja tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dokazi Naj bo $\{\tilde{s}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ zaporedje delnih
 vsot zaporedja $\{|a_m|\}_{m \in \mathbb{N}}$. Po predpostavki
 zaporedje $\{\tilde{s}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira. Zato je to
 to zaporedje tudi Cauchyjevo. Torej,
 za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja n_ε , tako da velja

$$m, n > n_\varepsilon \Rightarrow |\tilde{s}_m - \tilde{s}_n| < \varepsilon$$

$m > n$

Torej;

$$|\tilde{s}_m - \tilde{s}_n| = \left| \sum_{k=1}^m |a_k| - \sum_{k=1}^n |a_k| \right| =$$

$$= |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}| < \varepsilon$$

Po drugi skleni po tem:

$$|s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + \dots + a_{m+2} + a_{m+1}| \leq$$

$$\leq |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{m+2}| + |a_{m+1}| < \varepsilon$$

Ker je $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, smo absolutni, da je
 zaporedje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ delnoh vsot zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
Cauchyjsko. Zato je tudi konvergentno.

Taj obliko

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

□

Definicija: Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, za katere
 obliko $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ se imenuje absolutna konvergenca
 Bolje, njihove vrste so absolutno konvergentne.
 Zaporedje, za katere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obstaja, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
 pa ne obstaja pa so zaporedje s pozorno
konvergentnimi vrstami.

Na zelo prostem načinu, kot zgoraj, dokažemo
 naslednji izrek.

Izvēle ($\leq$ izvēle o majoranti) N_j būs $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

zaparsēti ir samērā pozitīviem elementiem un mēs
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ apskatīsim. N_j būs zaparsēti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

veidā: $|a_n| \leq b_n \quad \forall n$.

Tad apskatīsim koki rēķināt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Izvēle veidā mēģināsim sīkāk: $\tilde{b}$ apskatīsim $N \in \mathbb{N}$,

da veidā $|a_n| \leq b_n$ un $\forall n > N$,

pēc tam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apskatīsim.

Dokāz: Dokāzēsim "pravo versiju"

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{un} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Atzīmēsim: $b_m = \sum_{k=1}^m b_k$, $\mathbb{N}$ pieņemam, ka

$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverģentus, tad jē tādā

nozīmē. Tātad, $\forall \varepsilon > 0$ apskatīsim mēs

$$n+p, n > n_\varepsilon \Rightarrow |b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$$

Torej:

$$|b_{n+p} - b_n| = b_{n+p} + b_{n+p-1} + \dots + b_{n+2} + b_{n+1} < \varepsilon$$

Po strani pr. imamo:

$$|a_{n+p} + a_{n+p-1} + \dots + a_{n+2} + a_{n+1}| \leq |a_{n+p}| + \dots + |a_{n+1}| < \\ < b_{n+p} + \dots + b_{n+1} < \varepsilon$$

Spet označimo $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Zgornji nam
torej pove: Za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja n_ε , kjer se
več.

$$n+p, n > n_\varepsilon \Rightarrow |S_{n+p} - S_p| = |a_{n+p} + \dots + a_{n+1}| < \varepsilon$$

Torej, zaporedje $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je Cauchyjev in
zato tudi konvergentno. Torej velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

na obliko

□

Definicija: Izrazje $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, iz katere velja

$$|a_n| < b_n \quad \text{za vsa } n > N$$

za neki $N \in \mathbb{N}$, se imenuje **majornirana** izrazje
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

Primer: Pokazimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$ konvergentna.

$$\frac{1}{1^2} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{8^2}} + \underbrace{\frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{16^2}} + \dots$$

Majornirana:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_2 + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^2}}_8 + \dots$$

$$1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \frac{16}{16^2} + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Geometrijsko zaporedje $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$; $\alpha=1$, $z=\frac{1}{2}$

Iz vrste konverira. Je vrsta celotnega člena in
majornirana. Torej tudi $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ima

Kuznetno vsoto .