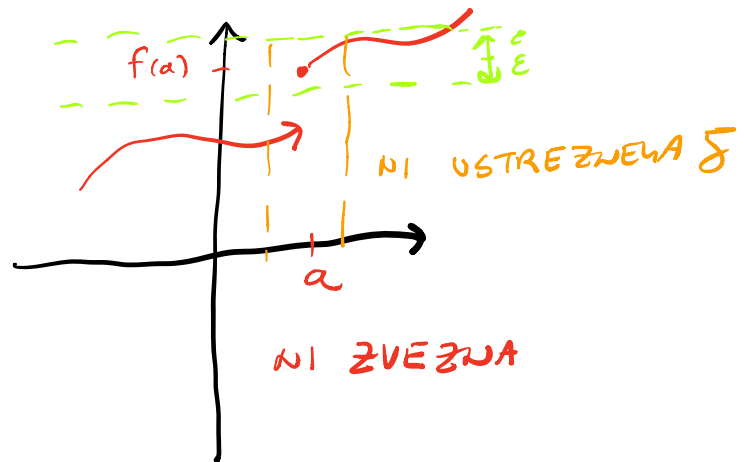
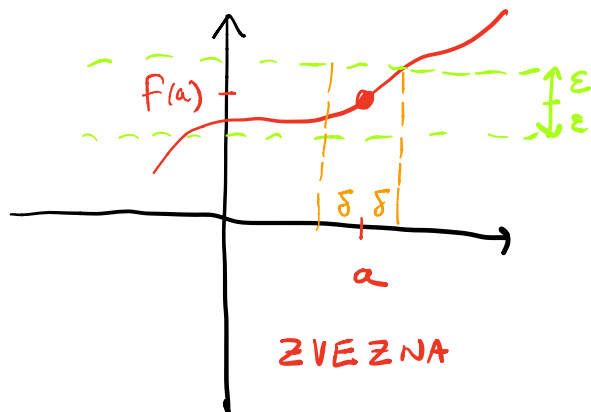


ŽVEZNOST FUNKCIJ

NAIVNO: OBRAVNAVATI ŽELIMO FUNKCIJE, KATERIH GRAF JE NEPRETRGAN.



MATEMATIČNA DEFINICIJA:

FUNKCIJA $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ JE ZVEZNA V TOČKI $a \in D$, ČE ZA $\forall \epsilon > 0$ OBSTAJA $\delta > 0$:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

NALOGA: PO DEFINICIJI DOKAŽI, DA JE $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ ZVEZNA V TOČKAH $a=0$ IN $a=2$

REŠITEV: NAJ BO $\epsilon > 0$ POLJUBNO ŠTEVILLO, IŠČIMO USTREZEN $\delta > 0$. OGLEDJMO SI

$$|f(x) - f(0)| = \left| \frac{x}{x^2+2} \right| = \frac{|x|}{x^2+2}$$

MI ŽELIMO TA IZRAZ OCENITI Z $|x-0|=|x| < \delta$.

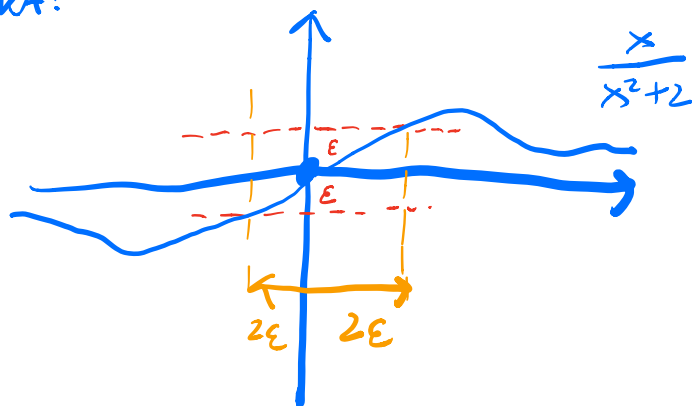
DOBIMO:

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\delta}{x^2+2} \leq \frac{\delta}{2} \approx \epsilon$$

TO SI ŽELIMO

ZA DANI $\varepsilon > 0$ JE TOREJ USTREZEN $\delta = 2\varepsilon$.

SLIKA:

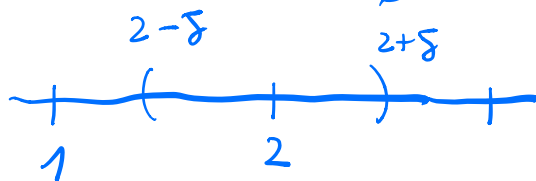


PODOBNO OBRAVNAVAMO $a=2$. NAJ BO $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - f(2)| = \left| \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3x - x^2 - 2}{3(x^2+2)} \right|$$
$$\leq \frac{1}{6} |(x-2)(x-1)| = \frac{1}{6} |x-2| \cdot |x-1|$$

TO ŽELIMO OCENITI Z $|x-2| < \delta$. DOBIMO:

$$|f(x) - f(2)| \leq \frac{1}{6} \cdot \delta \cdot |x-1| \leq \frac{2}{6} \cdot \delta < \varepsilon$$



ČE PREDPOSTAVIMO,
DA JE $\delta \leq 1$

ZA IZBRANI $\varepsilon > 0$, JE USTREZEN $\delta < \min \{1, 3\varepsilon\}$.

EKVIVALENTNI OPIS ZVEZNOSTI Z LIMITAMI:

DEFINICIJA:

$$\sim L = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ } \forall \varepsilon > 0 \text{ obstaja } \delta > 0, \text{ da}$$

$$\text{iz } |x - a| < \delta \text{ sledi } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$$\sim L_- = \lim_{x \uparrow a} f(x) \text{ (LEVA LIMITA)}, \text{ } \forall \varepsilon > 0 \text{ za vsak}$$

$$\varepsilon > 0 \text{ obstaja } \delta > 0, \text{ da iz } a - x < \delta \text{ sledi } |f(x) - L_-| < \varepsilon$$

$$\sim L_+ = \lim_{x \downarrow a} f(x) \text{ (DESNA LIMITA)}, \text{ } \forall \varepsilon > 0 \text{ za vsak}$$

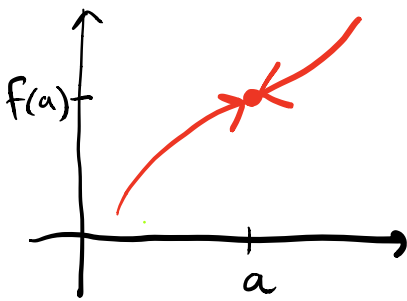
$$\varepsilon > 0 \text{ obstaja } \delta > 0, \text{ da iz } x - a < \delta \text{ sledi } |f(x) - L_+| < \varepsilon$$

ZA RAČUNANJE LIMIT VELJAJO ENAKA PRAVILA
KOT PRI ZAPOREDJIH (ZA VSOTO, PRODUKT, ITD.).

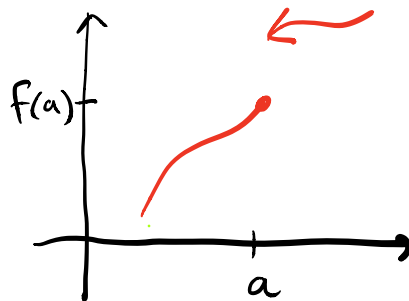
OPAZKA: L OBSTAJA NATANKO TEDAJ, KO
OBSTAJATA L_+ IN L_- , TER STA ENAKI.

IZREK:

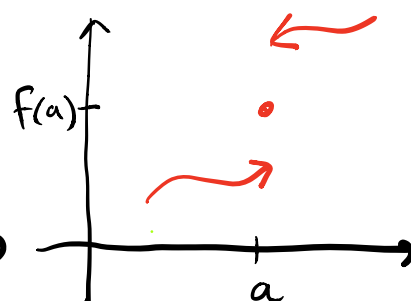
$$\{ f \text{ ZVEZNA V } a \iff \lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a) \}$$



ZVEZNA, KER
VSE TRI VREDNOSTI
ENAKE



NI ZVEZNA
 $f(a) \neq \lim_{x \downarrow a} f(x)$



NI ZVEZNA,
KER VSE TRI
VREDNOSTI
RAZLIČNE

NALOGA: ALI OBSTAJAJO PARAMETRI $a, b, c \in \mathbb{R}$,
DA BOSTA FUNKCIJI ZVEZLI NA $\mathbb{R}$.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ b \sin x + c, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

DEFINICIJA:

{ f JE ZVEZLA NA D , ČE JE ZVEZLA
V USAKI TOČKI $a \in D$. }

DEJSTVO:

{ ELEMENTARNE FUNKCIJE SO ZVEZNE NA
SVOJIH DEFINICIJSKIH OBMOČJIH. }

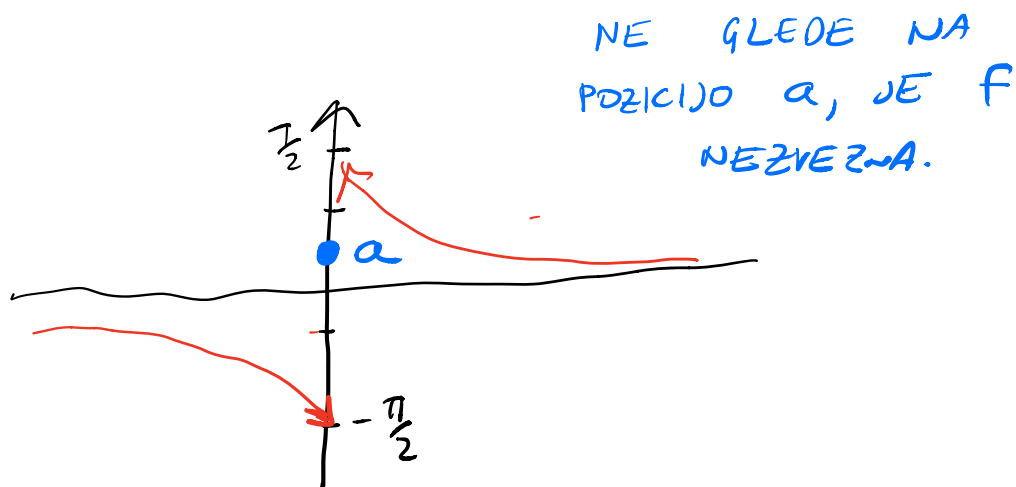
SKLEP: ZAGOTOVITI MORAMO LE ZVEZNOST
 f V $x=0$ IN g V $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

(a) DOLOČIMO LEVO IN DESNO LIMITO:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \infty \Rightarrow \arctan \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$x \uparrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \arctan \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

ODGOVOR JE: NE, SAJ JE LEVA IN DESNA
LIMITA NISTA ENAKI.



$$(b) \lim_{x \uparrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = -2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = b \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c = -b + c$$

VELJATI MORA: $-b + c = 2$

$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} g(x) = b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c = b + c$$

$$\lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = c \cos \frac{\pi}{2} = 0 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

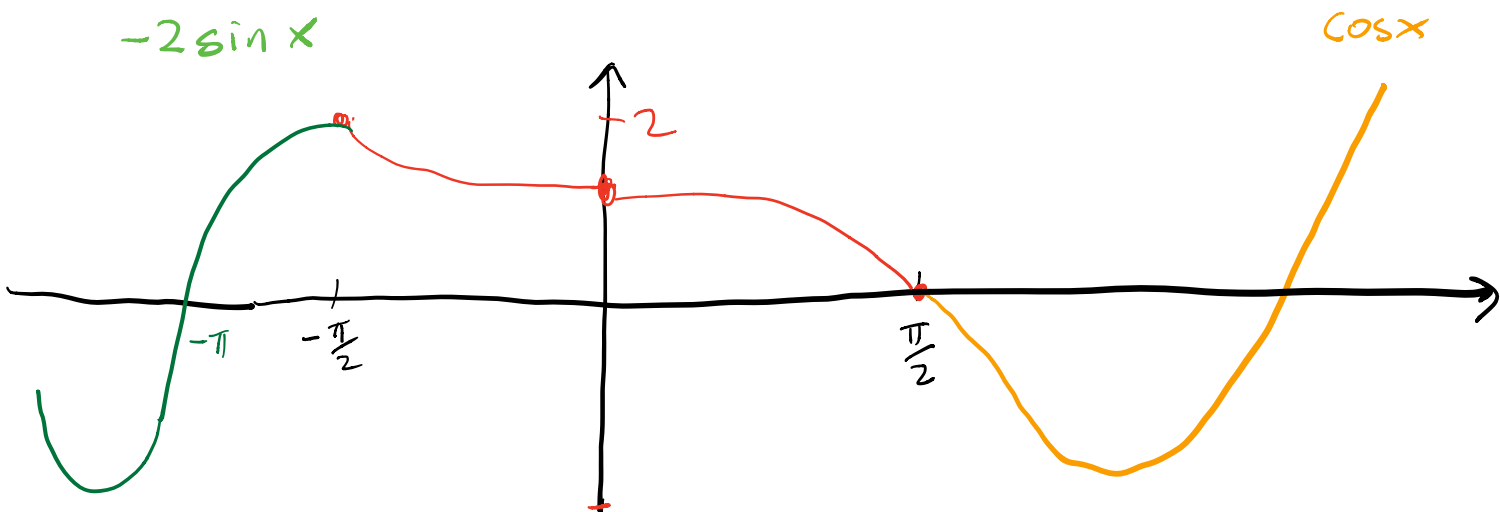
VELJATI MORA: $b + c = 0$

DOBIMO:

$$C=1$$

$$b=-1$$

$$g(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ -\sin x + 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



OPIS ZVEZNOSTI 2 ZAPOREDJI

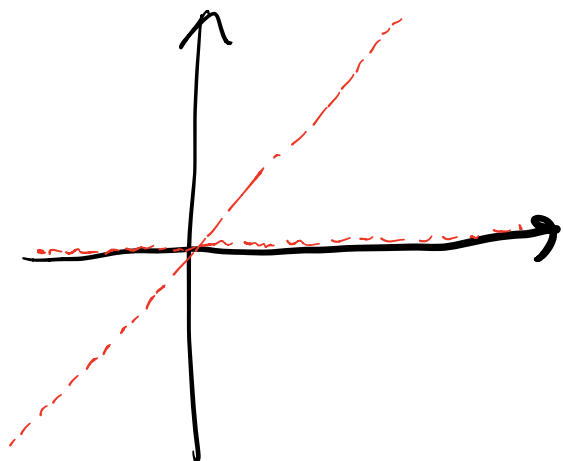
IZREK:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ zvezna} \\ \text{v } a \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ZA VSAKO ZAPOREDJE } a_n \rightarrow a \\ \text{VELJA, DA GRE } f(a_n) \rightarrow f(a) \end{array}$$

OPOMBA: TA TRDITEV JE POSEBEJ KORISTNA
ZA DOKAZ NEZVEZNOSTI, SAJ JE DOVOLJ
NAJTI ENO 'SLABO' ZAPOREDJE.

NALOGA: OBRATNAVA ZVEZOST ZA

$$F(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



DOMNEVA:

(F ZVEZNA LE V $a=0$.)

F ZVEZNA V $a=0$

NAJ BO $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \leq |x| < \delta < \varepsilon$$

↑
V OBEH
PRIMERIH

SKLEP: DOBER JE VSAK $\delta < \varepsilon$.

F NEZVEZNA V $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

RABIMO ENO 'SLABO' ZAPOREDJE.

NPR. $a_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

VELJA: $a_n \rightarrow a$ IN $f(a_n) = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow a \neq f(a) = 0$.

f NEZVEZLA $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

SPET NAJDEMO 'SLABO' ZAPOREDJE:

NPR. $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ JE DECIMALNI ZAPIS a

NA n DECIMALK PATAKNO. VELJA:

$$a_n \rightarrow a \quad \text{IN} \quad f(a_n) = 0 \rightarrow 0 \neq f(a)$$