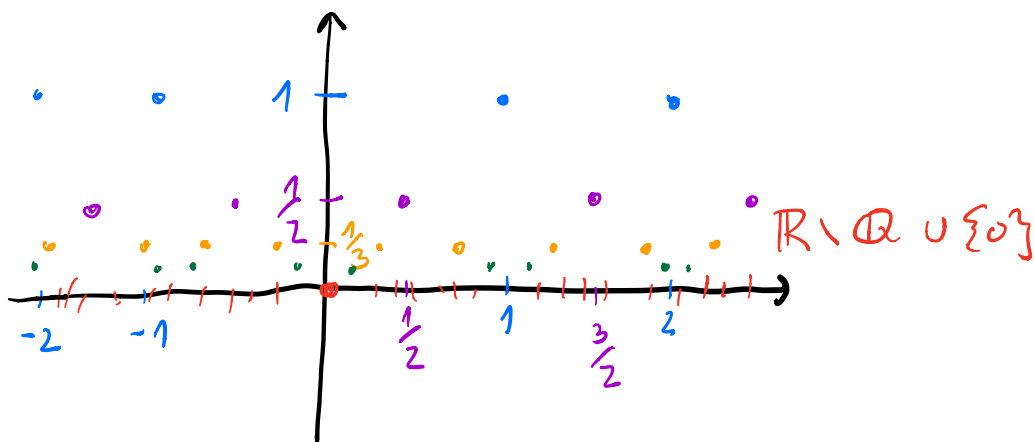


NALOGA:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{n}; & x = \frac{m}{n}, D(m,n)=1 \end{cases}$$

(a) DOKAŽI, DA f NI ZVEZNA V $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(b) DOKAŽI, DA f ZVEZNA V $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$.



REŠITEV:

(a) f NI ZVEZNA V $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

IZČENO ZAPOREDJE Z LASTNOST MA
 $a_n \rightarrow a$ IN $f(a_n) \not\rightarrow f(a)$. NPR.

$$a_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \rightarrow a$$

$$f(a_n) = 0 \rightarrow 0 \neq \frac{1}{n} = f(a)$$

(b) f JE ZVEZNA V $a=0$

NAJ BO $\varepsilon > 0$. IZČENO $\delta > 0$, DA BO

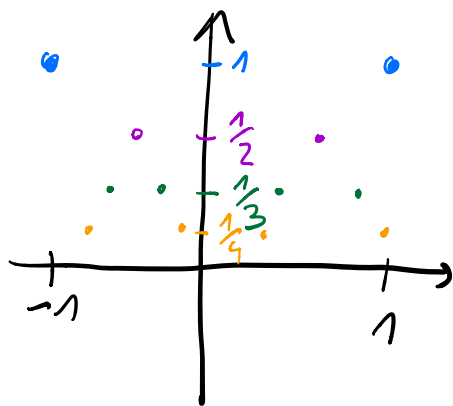
$|f(x)| < \varepsilon$ ZA $|x| < \delta$. ČE JE $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$,

JE TO VEDNO RES, ZATO SE OSREDOTOČIMO

NA $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, KO VELJA $f(x) = \frac{1}{n}$.

TRDIMO: ČE JE $\delta > 0$ DOVOLJ MAJHEN,
BO IZ $|x| < \delta$ SLEDILO, DA JE n
TAKO VELIK, DA ZANJ VELJA $\frac{1}{n} < \varepsilon$
t.j. $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

UTEMELJITEV: NAJ BO $\delta \leq 1$. NA
INTERVALU $[-1, 1]$ OBSTAJA LE
KONČNO MNOGO ULOMKOV, PRI
KATERIH JE $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. NATANČNEJE:



2	ZA	$n=1$
2	ZA	$n=2$
4	ZA	$n=3$
4	ZA	$n=4$
10	ZA	$n=5$
$\vdots$		
N	ZA	$n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$

NAJ BO $x_{\min}^{\varepsilon} \in [-1, 1]$ TAKO ŠTEVILO Z
NAJMANJŠO ABSOLUTNO VREDNOSTJO t.j.

$$|x_{\min}^{\varepsilon}| = \min_{\substack{x = \frac{m}{n} \in [-1, 1] \\ n \leq \frac{1}{\varepsilon}}} |x|$$

KER JHI JE
KONČNO MNOGO,
TAK $\min$ OBSTAJA
ZA $\forall \varepsilon$.

USTREZNI $\delta > 0$ JE TOREJ:

$$\delta < \min \{ |x_{\min}^{\varepsilon}|, 1 \}$$

RES, $\exists \varepsilon \quad |x| < \delta$ IN $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, VELJA:

$$|f(x)| = \frac{1}{k} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

ZA NER
 $k > n$

f JE ZVEZNA V a $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

PONOVIHO ZGORNJI DOKAZ ZA $[a-1, a+1]$,

PRI ČEMER JE $x_{\min}$ SEDAJ ODVISEN
OD ε IN OD a .

RAČUNANJE LIMIT

DEJSTVO: $\left\{ \begin{array}{l} \text{ČE } f \text{ DEFINIRANA IN ZVEZNA V } a, \\ \text{JE } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ t.j. LIMITA} \\ \text{JE ENAKA FUNKCIJSKI VREDNOSTI} \end{array} \right.$

PRAVILA ZA RAČUNANJE: ČE OBSTAJAJO USTREŽNE
LIMITE, ZANJE VELJAJO NASLEDNJE ZVEZE.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} (1 f(x)) = 1 \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad 1 \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{če } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right), \quad \text{če } f$$

ZVEZNA $\vee$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$,

TA PRAVILA UPORABLJAMO NA ENAK NAČIN
KOT PRI ZAPOREDJIH $+$ -j. POENOSTAVLJAMO
IZRAZ DOKLER NE PRIDEMO DO IZRAČUNLJIV
LIMIT.

NALOGA: IZRAČUNAJ LIMITE:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

REŠITEV:

ČE VSTAVIMO $x=1$,
DOBIMO $\frac{0}{0}$, KAR NI
DEFINIRANO

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{\cancel{(x-a)}} = na^{n-1}$$

SPET $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \stackrel{\text{0/0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\uparrow$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

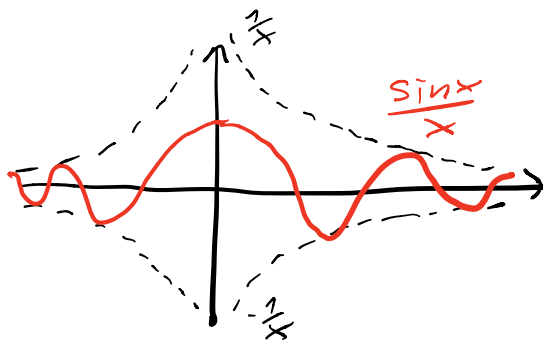
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \stackrel{\text{0/0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1.$$

NALOGA: DOKAŽ PREDAVANJA

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



IZRAČUNAJ LIMITE:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, a > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$

REŠITEV:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{a}} = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = a \cdot 1.$$

NOVA SPREM.
 $t = ax \rightarrow 0$,
KO $x \rightarrow 0$

V PRAKSI:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin(ax)}{a \cdot x} = a$$

POZOR: DELUJE LE, KO $ax \rightarrow 0$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ -\frac{\sin x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

1
-1

LIMITA NE OBSTAJA, KER SE
LEVA IN DESNA LIMITA NE UJEMATA.

$$(c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - t)}{t^2} =$$

$t = \frac{\pi}{2} - x$
 $t \rightarrow 0$, KO $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

STANDARD TRICK,
KO IMAMO $1 - \cos t$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos t} = \frac{1}{2}$$