

Šteilske vrste - madžarvici (4)

Navedimo še en izrek, ki je polsen izreku o majoranti, je pa nekoliko splošnejši.

Izrek. Naj bosta zaporedji $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedji s skrajni pozitivirani členi. Naj obstaja konstanta $C > 0$, tako da velja:

$$a_n \leq C b_n \quad n \in \mathbb{N}$$

Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ obstaja, obstaja tudi vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Dokaz. Ozležimo si obe zaporedji delnih vsot

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Po predpostavki velja:

$$s_n < \subset b_n$$

$$\text{ker} \quad \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{s_n} < \subset b_1 + \subset b_2 + \dots + \subset b_n \\ = \subset (\underbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_n}_{\subset \cdot \subset b_n})$$

Zapređje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je monotono, ker so vsi a_n pozitivni. Poleg ker velja

$$s_n < \subset b_n \quad \forall n$$

$$\text{Im} \quad \sum = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{velja: ker velja}$$

$$b_n \leq \sum a_k \quad \forall n,$$

$$\text{Tozaj:} \quad s_n < \sum a_k \quad \forall n$$

$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je ker monotono zapređje, ki je merljivo omejeno. Ker $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverira,

to je: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ obstaja $\square$

Naredimo nekaj druge klasične kriterije za obstoj vrst.

Izreki (kriteriji ali D'Alembertov kriterij)

Imajmo zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1.) Če obstaja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ in če velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

potem vrsta (vrsta) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ obstaja.

2.) Če obstaja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ in če velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

potem vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne obstaja.

3.) $\bar{e}$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ obstaja in $\bar{e}$ velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

po tem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lahko obstaja ali pa ne.

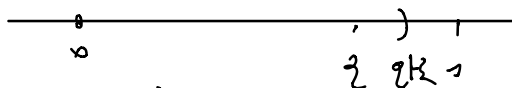
Dokaz: Dokazimo najprej 1.)

po predpostavki imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

Nj.h,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q < 1$$

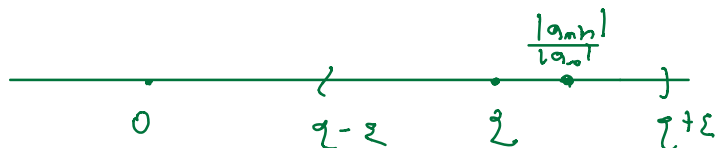


Nj. h. $\varepsilon > 0$ lahko najdemo, da velja

$$q + \varepsilon < 1.$$

Po definiciji limite zapišemo, obstaja n_ε ,
tako da velja

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - q \right| < \varepsilon$$



Torej, za $\forall n > n_\varepsilon$ je

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q + \varepsilon$$

$$|a_{n+1}| < |a_n| (q + \varepsilon) \quad (*)$$

Oglejmo si zaporedje:

$$|a_{n_\varepsilon}|, |a_{n_\varepsilon}|(q + \varepsilon), |a_{n_\varepsilon}|(q + \varepsilon)^2, \dots, |a_{n_\varepsilon}|(q + \varepsilon)^m, \dots$$

Izocene (*) očitno sledi:

$$|a_{n_\varepsilon + m}| < |a_{n_\varepsilon}| (q + \varepsilon)^m$$

Torej, zaporedje $\{|a_{n_\varepsilon}| (q + \varepsilon)^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ je

očitno majornanta zaporedje $\{|a_{n_\varepsilon + m}|\}_{m \in \mathbb{N}}$

izpusti $\{ |a_m| (q+\varepsilon)^m \}_{m \in \mathbb{N}}$ pa j
 geometrijsko zaporedje s kvociantom $(q+\varepsilon)$
 in $(q+\varepsilon) < 1$. Torej:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m_\varepsilon}| (q+\varepsilon)^m \text{ obstaja.}$$

To pa pomeni:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m_\varepsilon+m}| \text{ obstaja.}$$

Torej:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} |a_n| + \sum_{n=m_\varepsilon+1}^{\infty} |a_{m_\varepsilon+n}|$$

trudi obstaja. Naše zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ima
 konvergentno vrsto - celo absolutno konvergentno
 vrsto ima.

Dokaz bočle 2.)

$$\text{limsup: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$



za dati mogući $\varepsilon > 0$, važi:

$$2 - \varepsilon > 1,$$

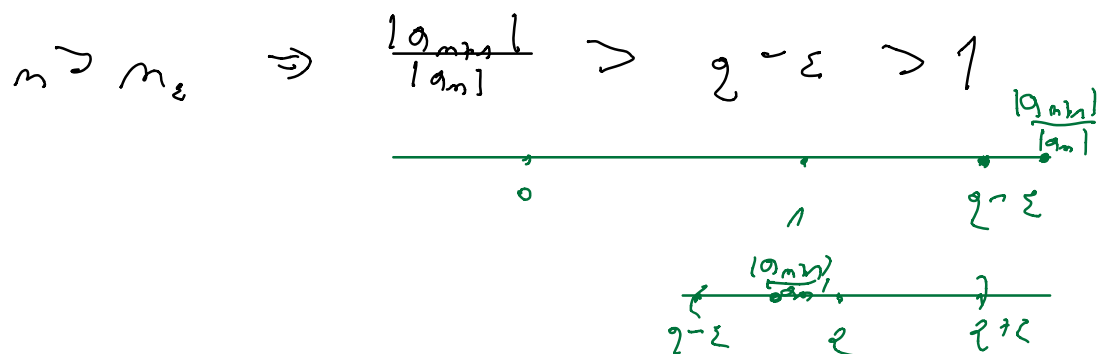
koji je slobodan

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Kako zbog toga, postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tako da važi

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - 2 \right| < \varepsilon$$

To je pojam:



odakle:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n| (2 - \varepsilon)$$

Torej: Zapravi $\{|a_{n_k}|(q^{-\varepsilon})^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ je
 minimaliz zapravi $\{|a_{n_k+m}|\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Ker sta obe zapravi sestavljeni iz samih poz.

domov. In ker

$$(a_{n_k})(q^{-\varepsilon})^m \longrightarrow +\infty,$$

ima tudi $|a_{n_k+m}| \longrightarrow +\infty,$

torej $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n_k+m}|$ ne obstaja.

Torej vrsta divergira.

S tem je točka 2.) dokazana;

Dokaz točke 3.)

Naredi nekaj primerov zaprav:

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ in $\sum_1^{\infty} a_n$ obstaja

$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1$ in $\sum_1^{\infty} b_n$ ne obstaja.

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{n}{(-1)^n} \right| =$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vemo pa: alternirajoča harmonična vrsta obstaja.

Če $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pa leži vzamemo običajno (nealternirajočo) harmonično vrsto.

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \left| \frac{1}{n+1} \right| \left| \frac{n}{1} \right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1$$

Vemo pa, da vrsta iz tega zaporedja **ne** obstaja.

□

Opozorilo: Ni treba, da sta si zaporedji, od katerih

ima i niz konvergentno raste, ali po sebi, tako
"blizu" kot zaporedji zbiraj.

Imajmo: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Imamo: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1,$$

Torej, o konvergenzi niste tega zaporedja nam
kocientni kriterij ne pove nič.

izrek (korenski kriterij)

Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje in naj obstaja

limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

1.) Če je $q < 1$, potem vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
dostaja

2.) Če je $q > 1$, potem vsaj $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ne obstaja.

3.) Če je $q = 1$, potem lahko vsaj $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ obstaja, ali pa ne.

Primer:

1.) Naj bo torej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1.$$

Torej, obstaja drogi majhen $\varepsilon > 0$, tako da je

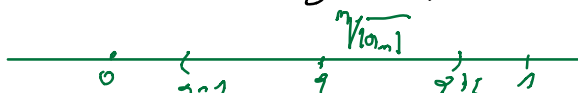
$$q + \varepsilon < 1.$$

Pr. definicij: limite obstaja n_ε , tako da velja

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{|a_n|} - q| < \varepsilon.$$

To pa pomeni:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < (q + \varepsilon)$$



2.1) t.d.:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| < (q + \varepsilon)^n$$

T.d.: Zpvedi $\{|a_{n_\varepsilon + m}|\}_{m \in \mathbb{N}}$ je majorizirano
i zvezljivo $\{(q + \varepsilon)^m\}_{m \in \mathbb{N}}$. To zvezdji
je geometrijska s "q" < 1 in ima zto
konvergentno vrsto.

Zto ima tudi $\{|a_{n_\varepsilon + m}|\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergentno
vrsto in zto ima tudi zvezdji $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
konvergentno vrsto.

Tako 2.) dokazemo na sedaj osten način
- prikažimo da je ta 2.) iz D'Alembertovega
izreka.

D.N. Povežite zvezdji $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, z kateri
velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dostajz, } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ je ne dostajz.}$$