

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{\sqrt{x^7} + \sqrt{x^3}}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin^3 x} \stackrel{=}{=} 1$$

$\downarrow$
1

$\downarrow$
1

$p > 0$. Poišči (če obstajata) $a, b > 0$, za kateri velja $ab = p$, $a + b$ pa je:

- minimalna
- maksimalna

$$a + b$$

$$\text{vemo: } ab = p$$

$$b = \frac{p}{a}$$

$$f(x) = x + \frac{p}{x}$$

Iščemo minimum in maksimum x za $x > 0$.

$$f'(x) = 1 - \frac{p}{x^2}$$

$$1 - \frac{p}{x^2} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{aligned} x^2 &= p \\ x &= \sqrt{p} \end{aligned} \quad (x > 0)$$

Ali f doseže minimum ali maksimum?
konvexna konvexna



- $f'' < 0$
- stac. točka je maksimum



- $f'' > 0$
- stac. točka je minimum

$$f''(x) = \left[1 - \frac{p}{x^2}\right]' = \frac{p}{x^3} > 0$$

$$\hookrightarrow x > 0, \text{ tudi } ?$$

$$x = \sqrt[p]{p}$$

f je konvexna (povod na $(0, \infty)$) $\Rightarrow$ stac. točka je minimum.

Maksimuma ni.

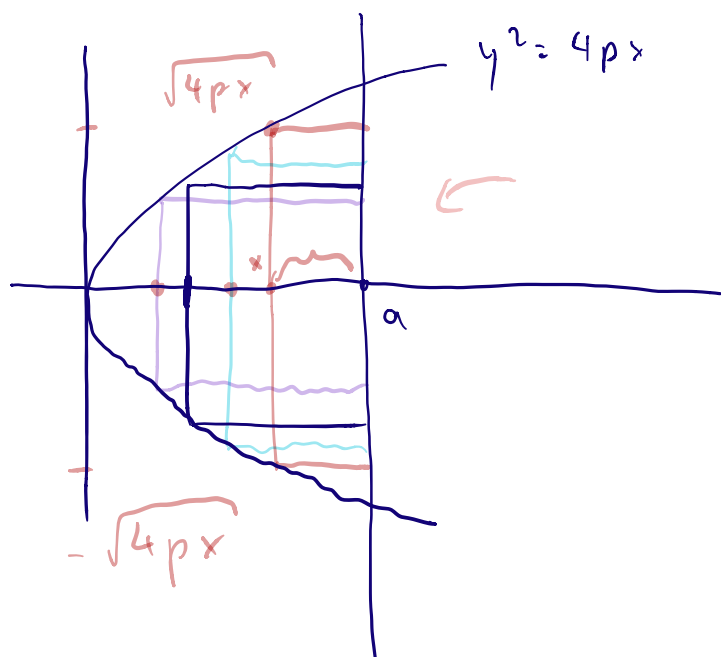
$$a \cdot b = p, \quad a + b$$

graf $1 - \frac{p}{x^2}$ ne doseže maksimuma na $(0, \infty)$

Parabola, $y^2 = 4px$

Premica: $x = a$

$$p, a > 0$$



$$S(x) = (a - x) y \cdot 2 = (a - x) \sqrt{4px} \cdot 2 =$$

$$= 4\sqrt{p}(a - x)\sqrt{x}$$

Za katere x izčleno maksimum?

Za $x \in (0, a)$

$$S'(x) = 4\sqrt{p}(-1)\sqrt{x} + 4\sqrt{p}(a - x) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

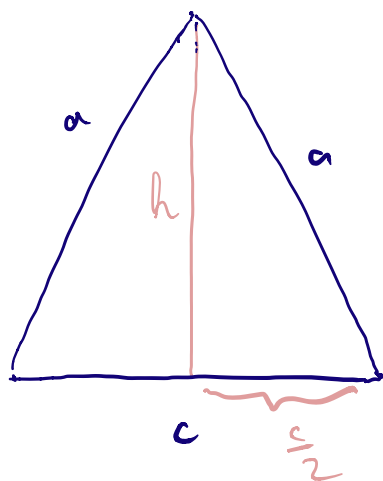
$$0 = -\sqrt{x} + \frac{a - x}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad | \cdot \sqrt{x} > 0$$

$$0 = -x + \frac{a - x}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{a}{2}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a}{3}}}$$

Poiščite razmerje med stranicami v enakokrakem trikotniku s fiksnim obsegom $\sigma > 0$, ki ima največjo možno ploščino.



$$\sigma = 2a + c$$

$$c = \sigma - 2a$$

$$S = \frac{c}{2} \cdot h$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$S(x) = \frac{\sigma - 2x}{2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2}$$

Iščemo ekstreme funkcije S

za $x \in \left(0, \frac{\sigma}{2}\right)$, $x \in \left[\frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{2}\right)$

$$S'(x) = -\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2} + \frac{\sigma - 2x}{2} \cdot \frac{2x - \frac{\sigma - 2x}{2}(-1)}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2}} =$$

$\sigma - 2x$

$$= -\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2} + \frac{\sigma - 2x}{2} \cdot \frac{x + \frac{\sigma - 2x}{2}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2}}$$

za kakve $x > 0$ odred oblasta?

$$x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2 > 0$$

$$x^2 - \frac{\sigma^2 - 4\sigma x + 4x^2}{4} > 0$$

$$-(\sigma^2 - 4\sigma x + 4x^2) > -4x^2$$

$$\sigma^2 - 4\sigma x + \cancel{4x^2} < \cancel{4x^2}$$

$$\sigma^2 - 4\sigma x < 0$$

$$\sigma(\sigma - 4x) < 0 \quad ; \quad \sigma > 0$$

$$\sigma < 4x$$

$$x > \frac{\sigma}{4}$$

($f(x)$) je definirana za $x \geq \frac{\sigma}{4}$

$$f = -\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2} + \frac{\sigma - 2x}{2} \cdot \frac{x + \frac{\sigma - 2x}{2}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2}}$$

$$f = -\left(x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)^2\right) + \frac{\sigma - 2x}{2} \left(x + \frac{\sigma - 2x}{2}\right)$$

$$f = -\left(x - \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)\right)\left(x + \left(\frac{\sigma - 2x}{2}\right)\right)$$

$$+ \frac{\sigma - 2x}{2} \left(x + \frac{\sigma - 2x}{2} \right)$$

$$\cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{\sigma - 2x}{2} \right)^2}$$

$$0 = - \left(x - \frac{\sigma - 2x}{2} \right) + \frac{\sigma - 2x}{2} \quad *$$

ALI lahko okrajšamo

$$\left(x + \frac{\sigma - 2x}{2} \right)? \quad \checkmark$$

DA, če velja $x + \frac{\sigma - 2x}{2} \neq 0$

Primer $x + \frac{\sigma - 2x}{2} = 0$

$$x + \frac{\sigma}{2} - x = 0 \quad * \quad (\sigma > 0)$$

$$0 = -x + (\sigma - 2x) \quad *$$

$$\underline{\underline{\sigma = 3x}}$$

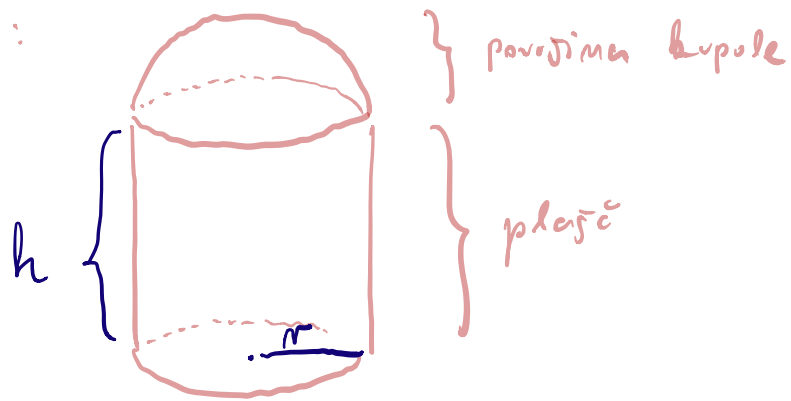
Dobimo enakostraničen trikotnik.

Kako preverimo, da je za $x = \frac{\sigma}{3}$ res dani maksimum?

- izračunamo drugi odvod

- Pogledamo, kje je S' pozitiven/negativen
- Razširimo funkcijo na $[\frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{2}]$
- $S(x) = 0$ za $x \in \{\frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{2}\}$
- funkcija S je odredljiva na $(\frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{2})$
 $\Rightarrow$ če bi bil maksimum dosežen
 na $x \neq \frac{\sigma}{3}$, bi dobili še eno
 stac. točko na $(\frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{2})$.
- iz tega sledi: v $\frac{\sigma}{3}$ je dosežen maksimum.

Gradimo silos:



Volumen V je fiksen.

$$V = V_1 + V_2$$

↳ volumen valja volumen kupole

Cena: $C_1 + C_2$, odvisna od površine

$$: S_1 + 2S_2$$

↓
ploščina
plošča

↙
ploščina
polovice
sfere

Fitžen volumen, najnižja možna cena gradnje.

$$V = V_1 + V_2 =$$

$$= \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

C:

$$S_1 + 2S_2 = h \cdot 2\pi r + 2 \cdot \frac{1}{2} 4\pi r^2 =$$

minimum

$$= 2\pi r \cdot h + 4\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 \cdot h + \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \left[V - \frac{2}{3} \pi r^3 \right]$$

$$\begin{aligned} C(r) &= \left[V - \frac{2}{3} \pi r^3 \right] \cdot \frac{1}{\cancel{\pi r^2}} \cdot \cancel{2\pi r} + 4\pi r^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{V}{r} - \frac{4}{3} \pi r^2 + 4\pi r^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot 2V + r^2 4\pi \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{2V}{r} + \frac{8\pi r^2}{3}$$

$$\underline{r > 0}$$

Iščemo minimum funkcije C .

Odvajamo C , dobimo

$$C'(r) = -\frac{2V}{r^2} + \frac{16\pi r}{3}$$

$$0 = -\frac{2V}{r^2} + \frac{16\pi r}{3}$$

$$\frac{2V}{r^2} = \frac{16\pi r}{3} \quad | \cdot r^2$$

$$2V = \frac{16\pi}{3} r^3$$

$$r^3 = \frac{6V}{16\pi} = \frac{3V}{8\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[3]{8\pi}} = \underline{\underline{D}}$$

Ali je tu dosežen minimum? Način:

- izračunamo r''

- C je odvedljiva za $r > 0$

$\Rightarrow$ mi ekstremov v točkah neodvedljivosti ali nezveznosti

Lahko bi se zgodilo:

$$\lim_{r \downarrow 0} C(x) = -\infty, \quad \lim_{r \downarrow 0} C(x) < C(0)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C(x) = -\infty$$

$$C(x) = \frac{2V}{r} + \frac{8\pi r^2}{3}$$

$$\text{Toda } \lim_{x \downarrow 0} C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \infty$$

Naloga je rešena (našli smo minimum).

ANALIZA TOGA FUNKCIJE S POMOČJO ODVODOV.

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$; odvedljiva na D_f

$f'(x) > 0$ za $x \in D_f \Rightarrow f$ strogo narašča v x

$f'(x) < 0$ za $x \in D_f \Rightarrow f$ strogo pada v x

Dokaži, da velja

$$\ln(1+x) \leq x \quad \text{za vse } x \geq 0$$

$$x = 0:$$

$$0 \leq 0 \quad \checkmark$$

$$x > 0$$

$$\text{za vse } x > M, M > 0$$

┐

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ od neke naprej

$$\text{j.e.} \quad \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

$$\ln(1+x) < x$$

Pogledamo odvod funkcij:

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$$

$$x' = 1$$

$$\frac{1}{1+x} < 1$$

$$\hookrightarrow x > 0$$

$$x - \ln(1+x) \geq 0 \quad (\text{za } x \geq 0)$$

$$1 - \frac{1}{1+x} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow x > 0$$

- V začetni vrednosti je $\ln(1+x) \approx x$

$$\downarrow$$

$$\forall x \approx 0$$

- Od $x=0$ naprej je $\ln(1+x)' < x'$
za $x > 0$

$\Rightarrow \ln(1+x)$ počasneje narašča kot funkcija x

$$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x \quad \text{za vse } x \geq 0$$

Skiciranje grafa funkcije
(Skupsta, 126 - 127)

- D_f
- sodost / lihost funkcije?
- $f(x) = 0$
- Točke nezveznosti $\rightarrow$ vrednost f v stac. točkah
- f' — stac. točke, intervale padanja / narašč.
- f'' ... prevojne točke $\rightarrow$ vrednost f v prevojih
konkavnosti / konvavnosti

• Obnašanje funkcije na robovih definic. območja.

- $a \notin D_f$, f definirana v okolici a

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (mogoče z ločitvijo na levo in desno limito)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$... ali obstaja asimptota
(enako za $x \rightarrow -\infty$)

- vodoravna

- linearna:

$$y = kx + n$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f'(x) \cdot x]$$

če obstaja ti dve
limiti obstajata

$f(x) = \frac{e^x}{x}$, skiciraj graf funkcije

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• soda / liha?

e^x ni soda/liha $\Rightarrow \frac{e^x}{x}$ ni soda/liha

• Niče f : ne, ker funkcija e^x nima ničel

• $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0$ za $x=1$ je

$-||- < -||- < 0$

$f(x) = e$

$-||- = -||- = 0$

f tu doseže minimum

• f narašča za $x > 1$

• N $x=1$ bo imela f stac. točko

• f pada za $x < 1$

• $f''(x) = \frac{[e^x(x-1)]'x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} =$

$= \frac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} =$

$= \frac{x^2 e^x - 2e^x x + 2e^x}{x^3} =$

$= e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} =$

$= e^x \frac{(x-1)^2 + 1}{x^3} > 0$

f je konveksna za $x > 0$

f je konstantna za $x < 0$

f ima prevojnih točk

• Obnašanje f na robnih def. območja:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

ALI obstaja LINEARNA NAVPIČNA ASIMPTOTA?

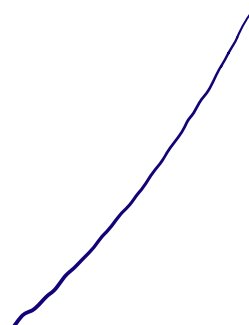
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(x-1)}{x^2} \dots \text{ne obstaja}$$

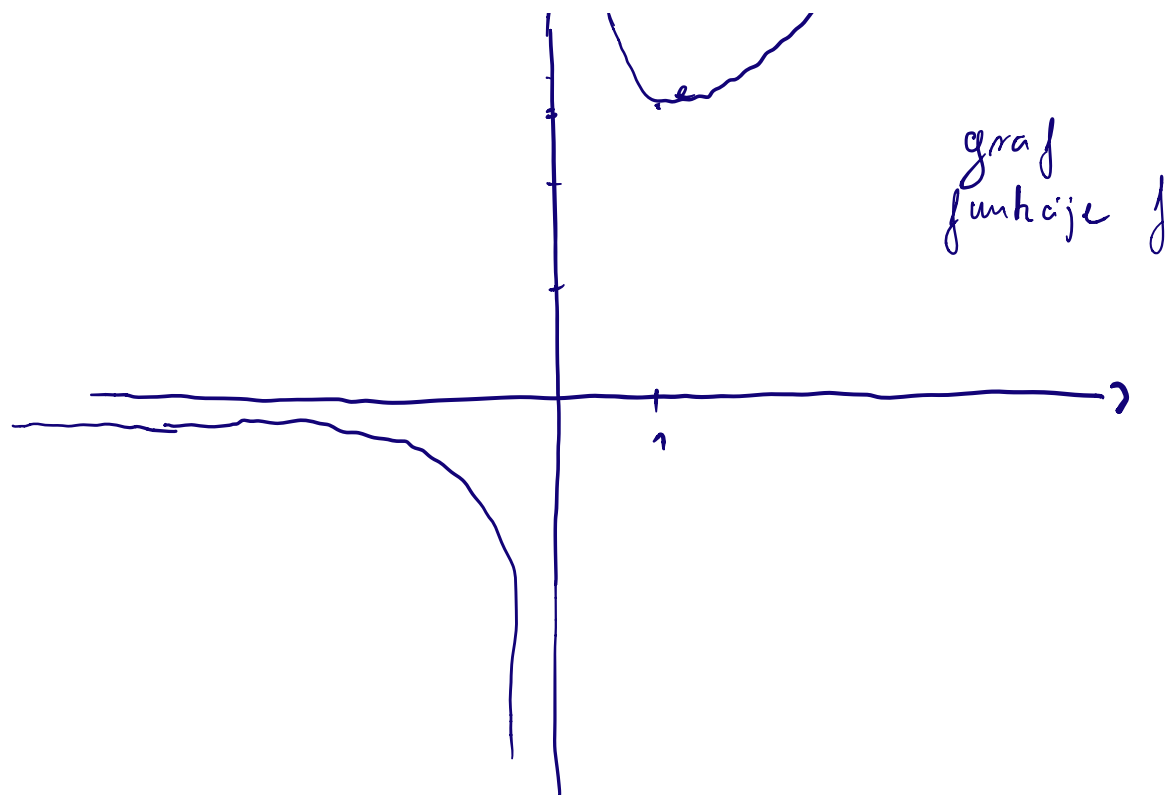
($= \infty$)

$\hookrightarrow$ preverimo z $L'H$

Ne.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$





$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{2x-1} \cdot e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Ničle funkcije: f ni definirana v $x=1$, zato f nima nobenih ničel.

$$f' = \left[\frac{2(x-1)^2}{2x-1} \cdot e^{\frac{1}{1-x}} \right]' =$$

$$= \frac{4(x-1)(2x-1) - 2(x-1)^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} e^{\frac{1}{1-x}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(x-1)^2}{2x-1} e^{\frac{1}{1-x}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) \\
 & = e^{\frac{1}{1-x}} \left[\frac{4(x-1)^2 [2x-1 - (x-1)]}{(2x-1)^2} + \frac{+2(x-1)^2}{2x-1} \right] \\
 & \left(= e^{\frac{1}{1-x}} \frac{4(x-1)^2 x - 2(x-1)(2x-1)}{(2x-1)^2} = \right. \\
 & \left. = e^{\frac{1}{1-x}} 2 \frac{(x-1)(2x-4x)}{(2x-1)^2} = \dots \right)
 \end{aligned}$$

=