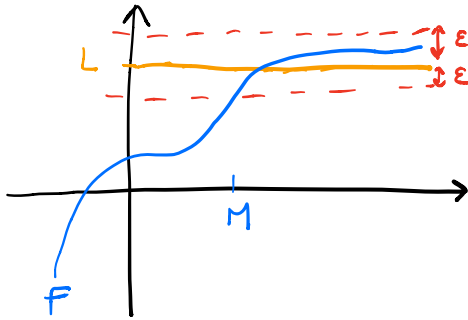


RAZŠIRITEV POJMA LIMITA

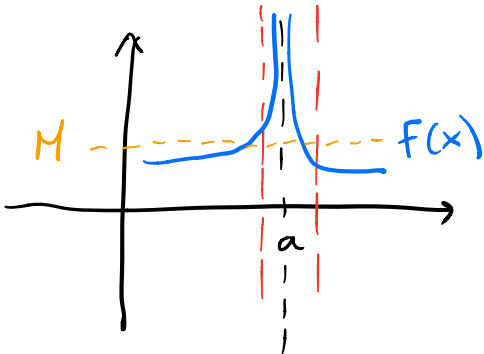
- ① $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $M \in \mathbb{R}$,
DA ZA $x > M$ VELJA: $|f(x) - L| < \varepsilon$.



OD NEKJE DALJE JE
SD $f(x)$ V ε -PASU
ŠTEVILA L .

NA PODOBEN NAČIN DEFINIRAMO $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

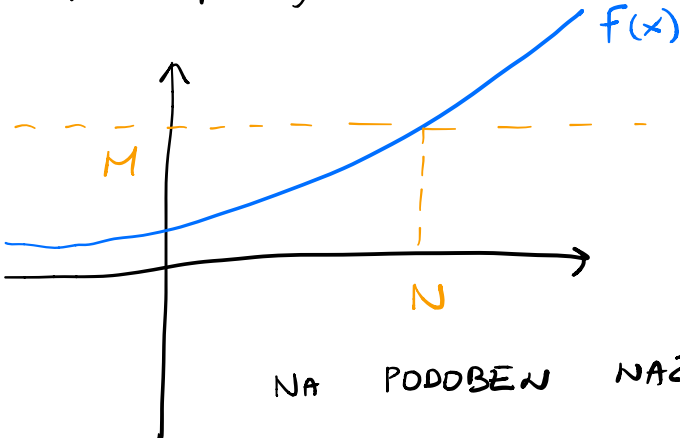
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, ČE ZA VSAK $M \in \mathbb{R}$
OBSTAJA $\delta > 0$, DA IZ $|x - a| < \delta$ SLEDI $f(x) > M$.



DOVOLJ BLIZU a
GRE $f(x)$ 'ČEZ VSE MEJE'!

NA PODOBEN NAČIN DEFINIRAMO $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

- ③ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, ČE ZA VSAK $M \in \mathbb{R}$ OBSTAJA
 $N \in \mathbb{R}$, DA ZA $x > N$ VELJA $f(x) > M$.



ZA DOVOLJ POZNE x
GRE $f(x)$ 'ČEZ VSE MEJE'.

NA PODOBEN NAČIN DEFINIRAMO $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

NALOGA: IZRAČUNAJ LIMITE:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \cosh x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (x + \sqrt[3]{1-x^3}) \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

NASVET: IZRAZI $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ IN $0 \cdot \infty$ SO NEDEFINIRANI. ČE SE POJAVIJO V LIMITI, JIH JE POTREBNO 'PREDELATI'.

REŠITEV:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (x + \sqrt[3]{1-x^3}) \stackrel{\infty \cdot (\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (x + \sqrt[3]{1-x^3}) \cdot \frac{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 (\cancel{x^3} + 1 - \cancel{x^3})}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} =$$

$$\uparrow$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln ch x) &= \overset{\infty - \infty}{\lim_{x \rightarrow \infty}} \left(\ln e^x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \overset{e^x}{: e^x} = \\
 &\quad \uparrow \text{ln zvezat} \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} \overset{0}{=} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \sin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right)$$

$\uparrow$ NOBENA OD TEH DVEH LIMIT SAMA ZASE NE OBSTAJA, KER SINUS OSCILIRA VSEKODI MED -1 IN $+1$.
 $\uparrow$ ADICIJSKI IZREK
 $\uparrow$ ZA TA IZRAZ SMO V TOCKI (a) VIDELI, DA GRE PROTI 0. Torej GRE $\sin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) \rightarrow 0$.

ALI TO ŽE POME NI, DA JE CELOTNA LIMITA NISCELNA? DA, KER JE KOSINUS OMEJEN.

SKLEP: LIMITA = 0

DODATNA UTEMELJITEV:

TRDITEV:

(NAJ BO $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$. CE JE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
 IN JE $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ OMEJENA, JE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

DOKAZ: OBSTAJA $M > 0$, DA JE $|g(x)| < M$ ZA $x \in \mathbb{R}$.

$|f(x) \cdot g(x)| < M |f(x)|$. NAJ BO $\varepsilon > 0$.

VENO, DA OBSTAJA $\delta > 0$, DA IZ $|x-a| < \delta$ SLEDI, DA JE $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$ (KER $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$).

TO JE NAŠ ISKANI δ , SAJ: $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$.

OPOMBA: ČE JE $a = \pm \infty$ MORAMO DOKAZ PRILAGODITI.

OPOZORILO: OMEJENOST JE NUJEN POGOJ!

NPR. $f(x) = x \rightarrow 0$ ZA $x \rightarrow 0$

$g(x) = \frac{1}{x}$ NEOMEJENA BLIZU $x=0$.

$f(x) \cdot g(x) = 1$ NE GRE K NIČ.

NALOGA: DENIMO, DA OBSTAJATA $L_g = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$L_f = \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, KJER JE $a \in \mathbb{R}$ ALI $a = \pm \infty$. DOKAŽI,

DA VELJA $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = (L_f)^{L_g}$

NASVET: LOGARITMIRANJE.

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

ZA TO FUNKCijo VENO, DA LIMITA OBSTAJA. RES,

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) =$$

$$= L_g \cdot \ln L_f = \ln (L_f)^{L_g}$$

PO DRUGI STRANI PA ZARADI ZVEZNOSTI $\ln$

VELJA:

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} \right) = \ln (L_f)^{L_g}$$

ČE TO ANTILOGARITMIRAMO, DOBIMO ŽELENO ZVEZO.

DEJSTVO:

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right.$$

NALOHA: Z UPORABO DEJSTVA IZRAČUNAJ LIMITE.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2+x+3}$

IDEJA: PREVESTI LIMITE NA LIMITE Z e .

REŠITEV:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x} \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} = e^6$

TA FUNKCIJA KONV. K e
(UPORABIMO PREJŠNJO NALOHO)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} =$

GRE PROTI $\pm \infty$
GRE PROTI 0

+j. USTREZNO
TIP LIMITE
ZA e .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2 e^x\right)^{\frac{1}{x^2 e^x}} \cdot x^2 e^x \cdot \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} =$$

TRIK
OD ZADNJIČ

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{1 - \cos^2 x} \cdot (1 + \cos x)$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\sin^2 x} (1 + \cos x) = e^2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} x^{tg \frac{\pi}{2} x}$$

SPET IMAMO VREDNOST, KI JE
MALO VEČJA/MANJŠA OD 1,
POTENCA PA JE $\pm \infty$. TOREJ
PRIČAKUJEMO e .

NOVA SPREMEMLJIVKA: $t = x - 1$.

$t \rightarrow 0$, KO $x \rightarrow 1$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{tg \frac{\pi}{2} (1+t)} \cdot \frac{1}{t} \cdot t = e \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot tg \frac{\pi}{2} (1+t)$$

IZRAČUNAJMO POSEBEJ:

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot tg \frac{\pi}{2} (1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{2} t)}{-\sin(\frac{\pi}{2} t)} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

SKLEP:

$$\text{LIMITA JE } e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + x + 3} =$$

ŽELIMO IMATI
"1 + NEKAJ"
V OKLEPAJU

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{x^2 + 1}{2} \cdot \frac{-2}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + x + 3)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(x^2 + x + 3)}{x^2 + 1}} = e^{-2}$$