

Po definiciji Riemannovega integrala določi, ali je funkcija Riemannovo integrabilna na $[0, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

Pokazali bomo, da Riemannove vsote, ko gre maksimalna dolžina delilnega intervala proti nič, konvergirajo proti nič. Fiksiramo $\epsilon > 0$. Našli bomo tak $\delta > 0$, da bo za vsako izbiro delilnih točk $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, tako da je $x_i - x_{i-1} < \delta$ in za vsako izbiro delilnih točk $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ veljalo $\sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})f(\zeta_i) < \epsilon$.

Naj n tak, da je $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ in naj bo $\delta := \frac{\epsilon}{4n}$. Naj bo x_k največja delilna točka, manjša ali enaka $\frac{1}{n+1}$. Potem je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})f(\zeta_i) &= \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1})f(\zeta_i) + \sum_{i=k+1}^m (x_i - x_{i-1})f(\zeta_i) \\ &< \frac{1}{n+1} + 2n \frac{\epsilon}{4n} = \epsilon \end{aligned}$$

V najslabšem primeru f v vseh testnih točkah v prvih k intervalih zavzame vrednost 1, točke $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ pa se so na robovih intervalov so zato kot testne točke vzete dvakrat. Kljub temu, kot kaže zgornja neenakost, Riemannova vsota zavzame vrednost, manjšo od ϵ .

Sklepamo, da Riemannove vsote konvergirajo proti ničli, saj je bil izbran $\epsilon > 0$ poljubno majhen.

S pomočjo Riemannovega integrala za izbrane funkcije izračunaj limito.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \\ (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right) \end{aligned}$$

1) $\frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^k$. Prepoznamo Riemannovo vsoto Riemannovo integrabilne funkcije $f(x) = x^k$ na intervalu $[0, 1]$, ki ga razdelimo na n enako dolgih manjših intervalov, testne točke pa vzamemo na desnih robovih. Limita Riemannove vsote je integral

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}.$$

$$2) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2n}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2n}{2n}} \right) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{i}{2n}}.$$

Prepoznamo Riemannovo vsoto funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na intervalu $[0, 1]$, tokrat razdeljenem na $2n$ enakih delov. Limita je torej

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2).$$