

Funkcija

Def: Funkcija je preslikava

$$f: A \rightarrow B,$$

kjer sta A in B neki podmnožici množice $\mathbb{R}$.
Običajno je A nekaj intervalov.

Opomba: Množica A je lahko en sam interval,
lahko je $A = \mathbb{R}$, ali pa np. $A = \mathbb{R}^+$...

Množica A se imenuje **definičijsko območje**

Množica B se imenuje **zelo vrednosti**

Pišemo

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

Velikost pišems:

$$y = f(x)$$

↓ ↓
odvisna spremenljivka neodvisna spremenljivka

Nekateri skupini izrazov:

$$f(x) = y$$

↓ ↓
original (original število y) sloka (sloka število x)

Funkcij ene spremenljivke lahko na
gesne knjižnici način upodabljamo v ravnini $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ordinatna os

y

x

abscisa os

Definicija Graf G_f funkcije $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je podmnožica $G_f \subset A \times \mathbb{R}$, podana s predpisom

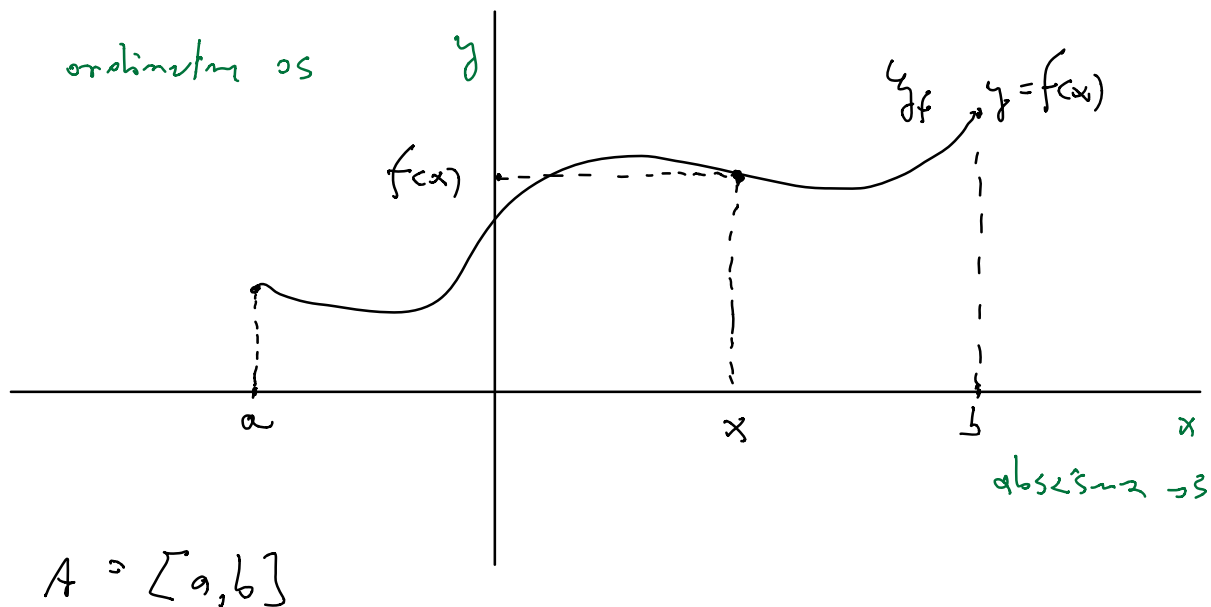
$$G_f = \{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} ; y = f(x) \}$$

Nekoliko skupine:

$$G_f = \{ (x, y) ; y = f(x), x \in A \}$$

Sa nekoliko skupine:

$$G_f = \{ (x, f(x)) ; x \in A \}$$



Opomba: Graf funkcije ni nujno linearen.

Primer: Naj bo $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom:

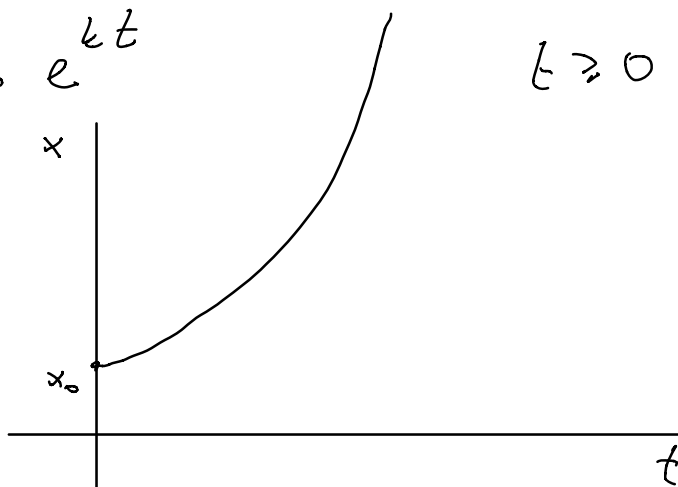
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])^c \end{cases}$$

$f(x) = 0$, če je x irracionalno število.

Primeri funkcij:

1.) Spornost & zbirna navedba:

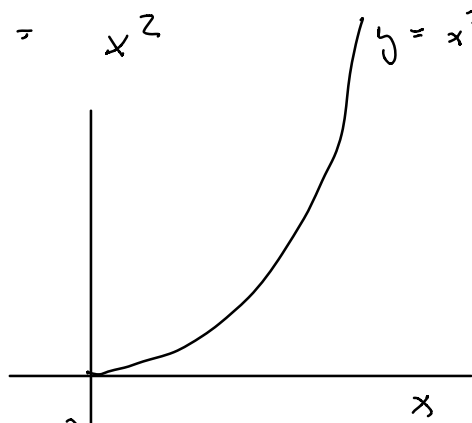
$$x(t) = x_0 e^{kt} \quad t \geq 0$$



2.) Naj bo x obširna stvarica kuzduka

Plóščen kvadrát je teóij podan s funkcijí

$$P(x) = x^2$$



$$\mathcal{D}_P = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$$

(definiční oblasť P)

Neladik širši pogled na pojem funkcije:

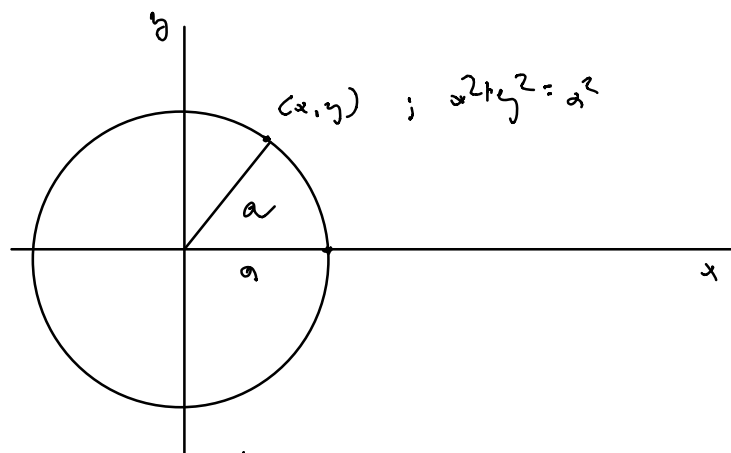
Bistvena vsebina pojma funkcije je vzpostavljen odnos (relacije) med odvisno in neodvisno spremenljivko.

Denimo, da nas zanima je "brezna" relacije.

Take relacije lahko upodobljamo geometrijsko s krivuljami v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Primeri:

$$x^2 + y^2 = a^2$$



Iz zgorajšje pozicje lahko izračunamo y v odvisnosti od x :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

Dobivamo dve funkciji v smislu naše prejšnje definicije

$$y_1(x) = + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y_2(x) = - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Zakaj krivulja, podana z $x^2 + y^2 = a^2$ ni funkcija v prostem smislu? Ker vsakemu $x \in [-a, a]$ priredi **dve** vrednosti $y_1(x)$ in $y_2(x)$ in ne ena, zato ni običajna, kot zahteva prva/2 definicija funkcije.

Def: Zapis oblike

$$F(x, y) = c$$

se imenuje **implicitni zapis funkcije**.

Npr.: $x^2 + y^2 = a^2$ je implicitni zapis funkcije
 $y(x) = +\sqrt{a^2 - x^2}$

Terminologija: $y = f(x)$ je **eksplicitni zapis funkcije**.

Če eksplicitnega zapisa funkcije nimamo, implicitni zapis iste funkcije:

$$y = f(x) \quad \text{---} \quad f(x) - y = 0$$

Obično pot ni naša funkcija - včasih niti ni izračunljiva

Priem: $xy + e^y = a$

Parametrični način podajanje funkcij s rešenj

odnos (rešenja) med spremenljivkama x in y
 lahko postavimo tudi s pomočjo katje spremenljivke o. parametra.

Def: Parametrična vektorska funkcija je par prespešev.

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

Priem: Poskusimo implicitno podati funkcijo

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y_i(x) = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \quad i=1,2$$

zapisz i v parametrycznej; oblicz:

Sprowadź se, że to jest sin i cos ref:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \quad \forall t$$

Nzj to

$$x(t) = a \cos(t)$$

$$y(t) = a \sin(t)$$

Testuj ref:

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2$$

Też, zapisz

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\text{in} \quad x = x(t) = a \cos(t)$$

$$y = y(t) = a \sin(t)$$

podstawić i to relacja między kółkami (sprowadzić)

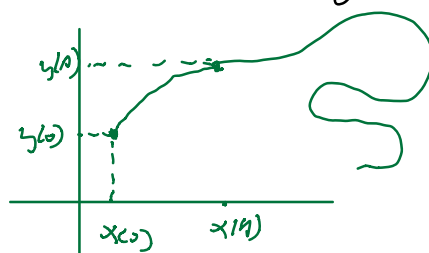
x i y.

Predložim iz $[a, b] \subset \mathbb{R}$ v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
 (iz intervale v ravnini), potem s preslikavanjem

$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

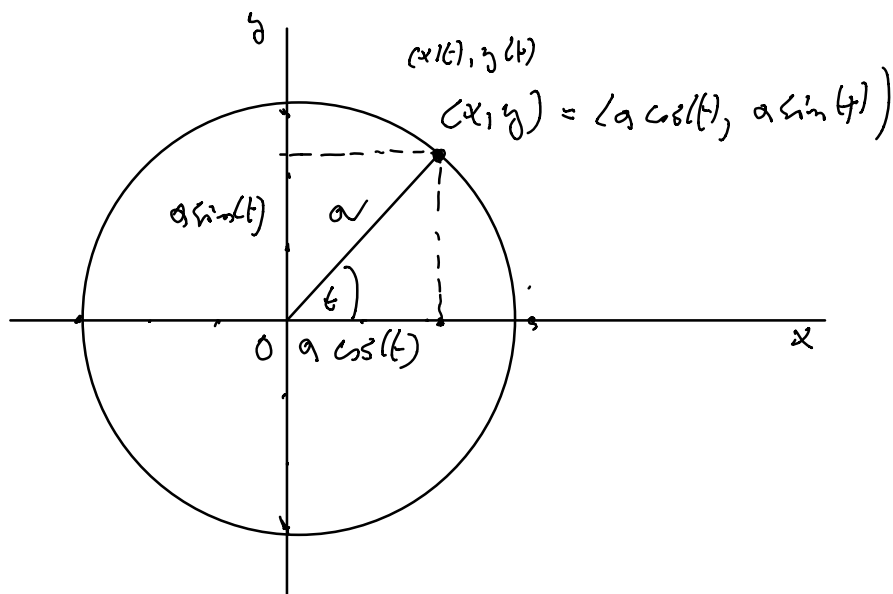
je krivulji v ravnini $\mathbb{R}^2$. To krivuljo lahko
 izrazimo z graf parametrično podane funkcije

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$



Načrt v poteku $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = a \sin(t)$ dobimo

lansy



Krug je baldi množka točiek (x, y) , ktoréľ kordati
 uskazezka implicitnu relaciu

$$x^2 + y^2 = a^2$$

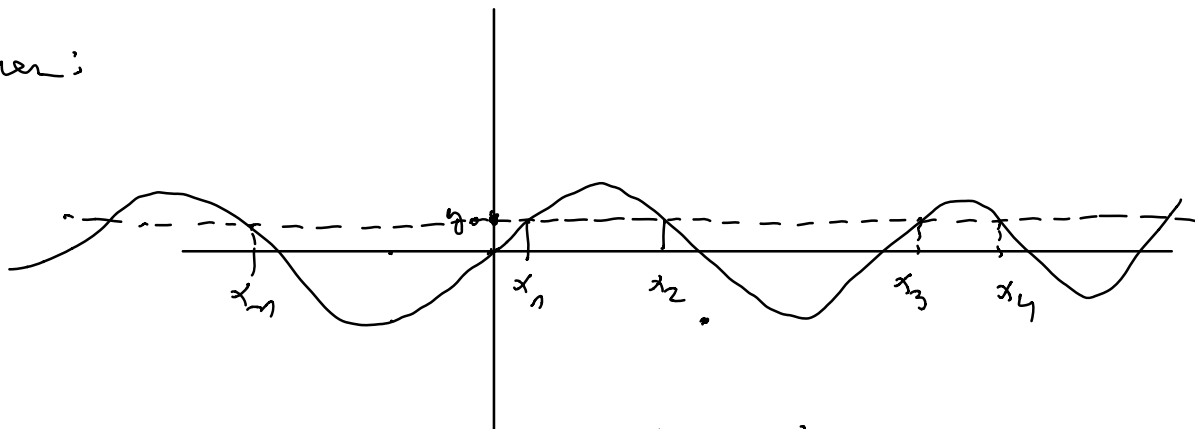
ali po explicitnom prepisovaní

$$y_1(x) = +\sqrt{a^2 - x^2} \quad y_2(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

Nalej splošniť dejstev o funkciách

Spomínas sa: Predstava je implicitná, že malíče
 x predstava v malíče y .

Pier:



Vidíme, že keď $y \in (-1, 1)$ dostajeme nekonečno
 mnoho hodnôt x ; $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \dots$,

za luba ref:

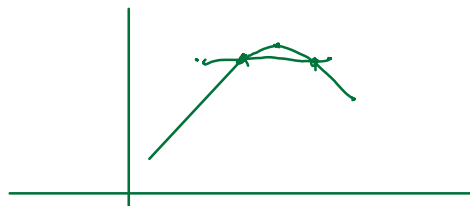
$$\sin(x_j) = y \quad j \in \mathbb{N}.$$

Funkcja $y = \sin(x)$ też **ni injektivna**.

Twierdzenie: Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

jeź na przedziale $[a, b]$ injektivna, to je silno po monotona i wzrasta. (silno malejąca albo po silno malejąca.)

Długo: D.N.



Odpowiedź: przypuszczamy, że je **złota** funkcja.

Spominamy se o pojęciu surjektivności i bijektivności.

Surjektivność $f: A \rightarrow B$; to $\forall y \in B$
obstaje takie $x \in A$ że $f(x) = y$.

Beispiel Lemma: $f: A \rightarrow B$ je bijektiv, a
je injektiv im surjektiv.

4. traktat sledi: Bižetična funkcija je najino
monotono naraščajoča ali pa monotono padajoča

$\bar{c}$ je funkcije bijektivna, ima inverznu funkciju.

Definicija: Nj $\hookrightarrow$
 $f: A \longrightarrow B$

bijectieve functie, Functie

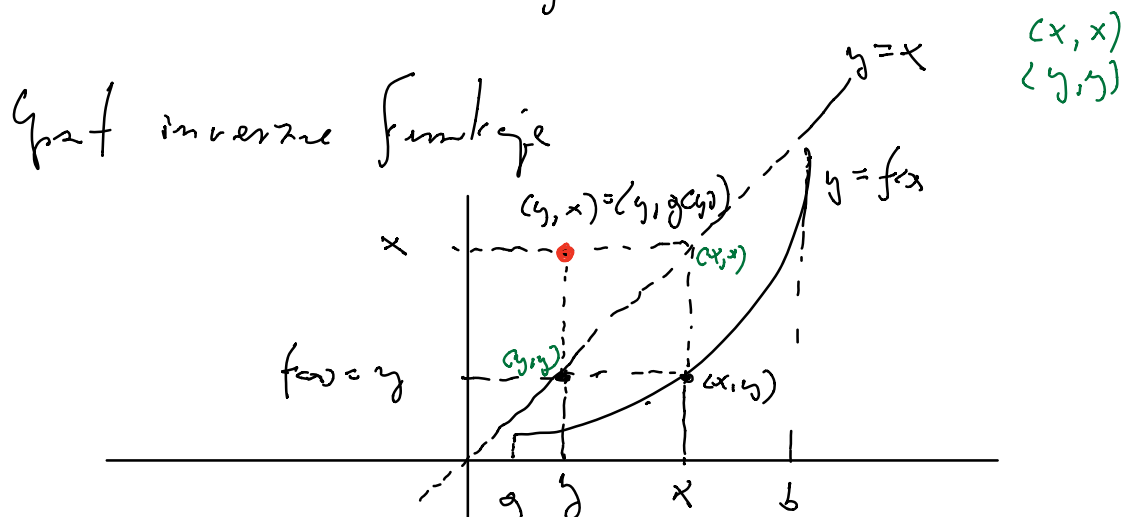
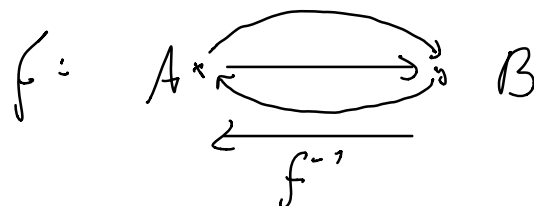
$$g: B \longrightarrow A$$

je funkciji f inverzna, to velja:

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$g(y) = x \iff f(x) = y$$

Oznaczenie: $g = f^{-1}$ ($f^{-1} \neq \frac{1}{f}$)



$$f(y) = x \Leftrightarrow g(x) = y$$

Należy też pamiętać, że $(y, x) = (y, g(y))$ po definicji funkcji odwrotnej, co oznacza, że $g(y) = x$.

$$g = \{ (x, g(x)) ; x \in B \}$$

$$= \{ (y, g(y)) ; y \in B \}$$

Opóźnienie:

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \zeta_f \Rightarrow (y, x) \in \zeta_g = \zeta_{f^{-1}}$$

Predstaw $(x, y) \longmapsto (y, x)$ ja odwrotność
wzajemnie $\mathbb{R}^2$ przekształcenie lish kwadrantów.

Treść:

Graf $\zeta_{f^{-1}}$ odwrotnej funkcji f^{-1} będzie taki,
dz graf ζ_f przekształcenie przekształcenie lish kwadrantów.

Kompozycja funkcji:

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Jeśli odwrotna funkcja jest:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = *$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \quad \text{to } f \text{ jest odw. funk.}$$

$$* = f^{-1}(y) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

Kompozycja f i f^{-1} jest równożną funkcją

$$y(x) = x$$

