

ENAKOMERNA ZVEZNOST

SPOMNIMO:

~ ZVEZNOST f v $a \in D$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, DA VELJA:
 $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

~ ZVEZNOST f NA D : f JE ZVEZNA ZA VSAK $a \in D$.

NOVA DEFINICIJA:

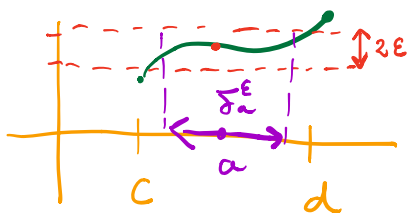
FUNKCIJA f JE ENAKOMERNO ZVEZNA NA D ,
ČE ZA $\forall \varepsilon > 0$ OBSTAJA $\delta > 0$, DA ZA
VSAK $x \in D$ IN $y \in D$ VELJA: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

KAJ JE KLJUČNA RAZLIKA MED ZVEZNOSTJO
NA D IN ENAKOMERNO ZVEZNOSTJO NA D ?

ODGovor: PRI ZVEZNOSTI JE ZA DANA $\varepsilon > 0$ IN $a \in D$
 $\delta_a^\varepsilon > 0$ ODVISEN OD TEH DVEH PARAMETROV, PRI ENAKOMERNI
ZVEZNOSTI PA MORE BITI $\delta^\varepsilon > 0$ PRI DANEM
 $\varepsilon > 0$ 'DOBER' ZA VSE PARE $x, y \in D$.

KDAJ JE TEMU ZADOŠČENO?

NA PRIMER, KO IMAMO ZVEZNO FUNKCIJO NA
ZAPREM INTERVALU.

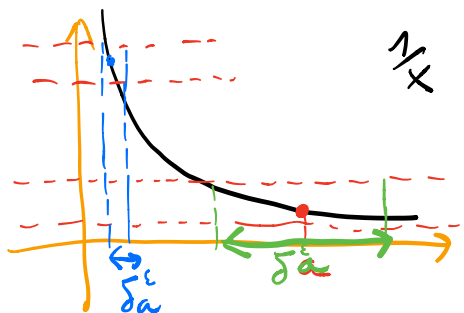


PREDPOSTAVIMO LAHKO, DA
 $\delta_a^\varepsilon > 0$ ZVEZNO VARIRA Z $a \in [c, d]$,
ZATO OBSTAJA $\delta^\varepsilon = \min_{a \in [c, d]} \delta_a^\varepsilon > 0$

(DOKAZ NA PREDAVANJIH)

KDAJ TEMU NI ZADOŠČENO?

NA PRIMER, KO GRE $\delta_a^\epsilon \rightarrow 0$ NA ROBU OBMOČJA D .



POU FIKSNEM $\epsilon > 0$, GRE
 $\delta_a^\epsilon \rightarrow 0$, KO $a \rightarrow 0$. ZATO
LAHKO ZA VSAK $\epsilon > 0$ IN $\delta > 0$ NAJDEMO
 x, y BLIZU 0, DA VELJA:
 $|f(x) - f(y)| > \epsilon$

OPOMBA: V PRAKSI NAVADNO IZPUŠČAMO INDEKSA ϵ IN a .

NALOGA: DOKAŽI, DA JE FUNKCIJA $f(x) = \sqrt{x}$
ENAKOMERNO ZVEZNA NA $[0, 1]$, $[1, \infty)$ IN $[0, \infty)$.

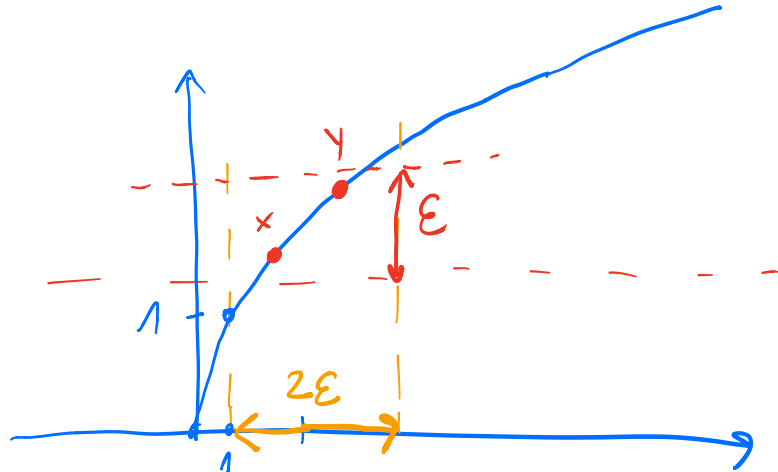
REŠITEV: ZA $[0, 1]$ TO ŽE VEMO, DOKAŽIMO
ENAKOMERNO ZVEZNOST NA $[1, \infty)$.

NAJ BO $\epsilon > 0$. IŠČEMO USTREZEN δ . ČE $x, y \in [1, \infty)$,
VELJA:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \left| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| \leq \\ &\leq \frac{|x - y|}{2} < \frac{\delta}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

↑ KER $x, y \geq 1$ ↑ ČE $|x - y| < \delta$ ↑ TO ŽE LINO

SKLEP: USTREZEN JE $\delta = 2\epsilon$.



ČE $|x-y| < 2\varepsilon$, JE
 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

DVE VPRAŠANJI GLEDE NADALJEVANJA:

① ALI LAHKO ISTI DOKAZ UPORABIMO ZA $[0, \infty)$?

NE. KER IMAMO $\left| \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right|$. TO JE POLJUBNO
 VELIKO, KO JE x ALI y BLIZU 0.

② ALI ENAKOMERNA ZVEZNOST NA $A \cup B$ SLEDI IZ
 ENAKOM. ZVEZNOSTI NA A IN B ?

V SPLOŠNEM NE, SAJ LAHKO VZAMENO
 $x \in A$ IN $y \in B$ TER MORDA DOBIMO SLABE OCENE.

REŠITEV! UPORABIMO DEJSTVO, DA JE $\sqrt{x}$
 ENAK. ZVEZEN TUDI NA $[0, 2]$. TOREJ NAJ
 BO $\varepsilon > 0$, POTEM:

(i) ČE $x, y \in [0, 2]$, OBSTAJA USTREZEN $\delta_1^\varepsilon > 0$,
 KER JE $\sqrt{x}$ ENAK. ZVEZEN NA $[0, 2]$.

(ii) ČE $x, y \in [1, \infty)$, OBSTAJA USTREZEN $\delta_2^\varepsilon > 0$
 IZ PODOBNEGA RAZLOGA.

(iii) ČE $\delta < 1$, VELJA BODISI $x, y \in [0, 2]$ BODISI $x, y \in [1, \infty)$,
 TOREJ SMO V (i) ALI (ii).

SKLEP: USTREZEN JE $\delta^\varepsilon = \min \{ \delta_1^\varepsilon, \delta_2^\varepsilon, 1 \}$.

NALOGA: OBRAVNAVAJ ENAKOMERNO ZVEZNOST
FUNKCIJE $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ NA $(0, a)$ IN (a, ∞) ZA $a > 0$.

NASVET: SKICIRAJ GRAF.

NIČLE: $\frac{\pi}{x} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

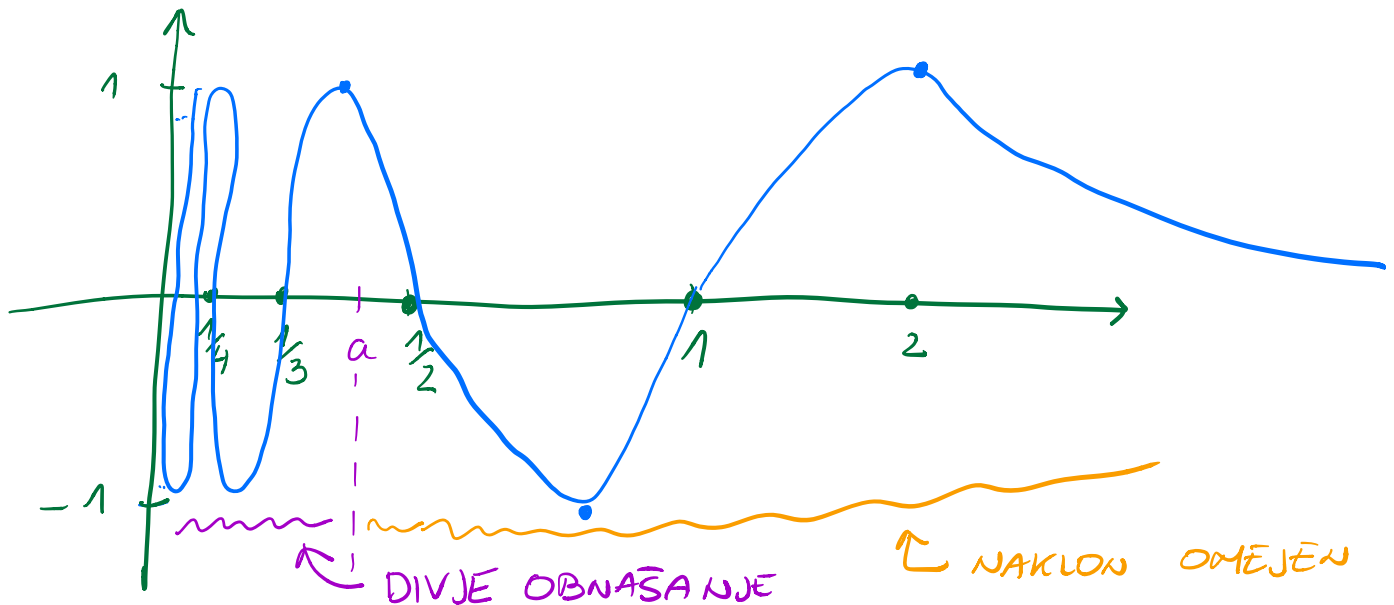
$$x = \frac{1}{k}$$

MAX: $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$x_k^{\max} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2k} = \frac{2}{1+4k}$$

MIN: $\frac{\pi}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$x_k^{\min} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 2k} = \frac{2}{4k-1}$$



DOMNEVI: ① NA (a, ∞) FUNKCIJA JE ENAK. ZV.
② NA $(0, a)$ FUNKCIJA NI ENAK. ZV.

DOKAZA:

① F ENAK. ZV. NA (a, ∞)

NAJ BO $\varepsilon > 0$ IN $x, y \in (a, \infty)$. POTEM JE

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sin \frac{\pi}{x} - \sin \frac{\pi}{y} \right| =$$
$$= \left| 2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{y}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{y}}{2} \right) \right| =$$

↑
ADICIJSKI
IZREK

$$= 2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x-y}{x \cdot y} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x+y}{x \cdot y} \right) \right|$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\pi}{2} \left| \frac{x-y}{x \cdot y} \right| \cdot 1 \leq \frac{\pi}{a^2} |x-y| <$$

↑
 $\cos x \leq 1$
 $|\sin x| \leq |x|$

↑
 $x, y \geq a$

$$< \frac{\pi}{a^2} \delta < \varepsilon$$

SKLEP: USTREZEN JE $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{\pi}$.

OPAZKA: VIDIMO, DA $\delta \rightarrow 0$, KO $a \rightarrow 0$, A TO
ŠE NI DOKAZ ZA ②.

② F NI ENAKOM. ZVEZNA NA (0, a)

RABIMO TOČKE x IN y , KI BODO POLJUBNO BLIZU,
NJHOVE VREDNOSTI PA BODO VSEENO 'DALEČ KRAŽENO'.

NPR.

$$\left. \begin{aligned} x &= x_k^{\max} = \frac{2}{1+4k} \\ y &= x_k^{\min} = \frac{2}{-1+4k} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |x-y| &= \left| \frac{8k}{16k^2-1} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ |f(x) - f(y)| &= |1 - (-1)| = 2 \end{aligned}$$