

Vektorski prostori 2.del

Definicija baze

Naj bo V vektorski prostor. Vektor $v \in V$ se da izraziti kot **linearna kombinacija** vektorjev $v_1, \dots, v_n \in V$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, da velja $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Pogosto lahko te skalarje izberemo na več različnih načinov.

Definicija baze

Naj bo V vektorski prostor.

- Vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ so **ogrodje**, če se da vsak vektor $v \in V$ na **vsaj en** način izraziti kot linearna kombinacija $v_1, \dots, v_n$.
- Vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ so **linearno neodvisni**, če se da vsak vektor $v \in V$ na **največ en** način izraziti kot linearna kombinacija $v_1, \dots, v_n$.
- Vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ so **baza**, če se da vsak vektor $v \in V$ na **natanko en** način izraziti kot linearna kombinacija $v_1, \dots, v_n$.

Opomba: Očitno so vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ baza natanko tedaj, ko so linearno neodvisni in ko so ogrodje.

Linearna ogrinjača vektorjev $v_1, \dots, v_n \in V$ je definirana kot množica vseh vektorjev $v \in V$, ki se dajo izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $v_1, \dots, v_n$. Označimo jo z $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$. Linearna ogrinjača prazne množice $\{\}$ naj bo $\{0\}$. Linearna ogrinjača je vektorski podprostor v V .

Opomba: Vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ so **ogrodje** natanko tedaj, ko je njihova linearna ogrinjača enaka V .

Izrek 1 - Karakterizacije linearne neodvisnosti

Za vektorje $v_1, \dots, v_n$ iz vektorskega prostora V so ekvivalentne trditve:

- (1) Vektorji $v_1, \dots, v_n$ so linearno neodvisni.
- (2) Za vsake skalarje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki zadoščajo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, velja $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
- (3) Nobeden od vektorjev $v_1, \dots, v_n$ se ne da izraziti kot linearna kombinacija preostalih vektorjev.

Opomba: V nadaljevanju bomo uporabljali točko (2) kot (alternativno) definicijo linearne neodvisnosti vektorjev.

Dokaz: Dokazali bomo, da je $(1) \Leftrightarrow (2)$ in da je $(2) \Leftrightarrow (3)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Recimo, da so $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni. Potem se da vektor 0 na kvečjemu en način izraziti kot linearna kombinacija $v_1, \dots, v_n$. Ena izražava je $0 = 0v_1 + \dots + 0v_n$. Če imamo še eno izražavo, recimo $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, potem je $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ zaradi enoličnosti.

(2) $\Rightarrow$ (1) Recimo, da iz $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Vzemimo nek vektor v , ki se da na dva načina izraziti kot linearna kombinacija vektorjev $v_1, \dots, v_n$. Prvi način naj bo $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$, drugi način pa $v = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$. Ko oba načina odštejemo, dobimo $0 = v - v = (\beta_1 - \gamma_1)v_1 + \dots + (\beta_n - \gamma_n)v_n$. Po predpostavki odtod sledi $\beta_i - \gamma_i = 0$ za vse i , se pravi $\beta_i = \gamma_i$ za vse i . Torej sta oba načina enaka.

(2) $\Rightarrow$ (3) Recimo, da velja (2) in da ne velja (3). Potem lahko pri nekem i izrazimo v_i kot linearno kombinacijo preostalih vektorjev, se pravi kot $v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$. Ta izraz preoblikujemo v $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1)v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Ker velja (2), odtod sledi $-1 = 0$ (in $\alpha_i = 0$ za vse i), kar je protislovje.

(3) $\Rightarrow$ (2) Recimo, da velja (3) in da ne velja (2). Torej obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki niso vsi enaki nič, da je $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Vzemimo tak i , da je $\alpha_i \neq 0$. Potem lahko odtod izrazimo vektor v_i kot linearno kombinacijo ostalih vektorjev, kar je protislovje.

Primeri baz

V nadaljevanju bomo potrebovali, da se vse karakterizacije obrnljivih matrik nad poljem $\mathbb{R}$ posplošijo na vsako polje F .

Primer - Baze v F^n

Stolpčni vektorji $v_1, \dots, v_n \in F^n$ so baza natanko tedaj, ko je

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

To sledi iz karakterizacij obrnljivih matrik. Posebna primera sta:

- Standardna baza $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vektorji $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dots$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ so baza za F^n .

Opomba: Standardna baza v $M_{m,n}(F)$ so koordinatne matrike $E_{i,j}$. Matrika $E_{i,j}$ ima na (i,j) -tem mestu enko, drugod pa same ničle.

Primer - Lagrangeov interpolacijski polinom

Naj bo $n \geq 2$ naravno število, F polje z vsaj n elementi in $x_1, \dots, x_n$ paroma različni elementi polja F . Naj bo $V = F[x]_{n-1}$ vektorski prostor vseh polinomov stopnje $\leq n-1$ s koeficienti iz F . Trdimo, da so polinomi

$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{x - x_i} = \prod_{j \in \mathbb{N}_n, j \neq i} (x - x_j), \quad \text{za } i = 1, \dots, n$$

baza vektorskega prostora V . Začnimo z linearno neodvisnostjo. Če je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) = 0,$$

potem za vsak j vstavimo x_j . Ker je $p_i(x_j) = 0$ za vsak $i \neq j$, ostane $\alpha_j p_j(x_j) = 0$. Ker so x_k paroma različni, je $p_j(x_j) \neq 0$. Sledi $\alpha_j = 0$.

Dokažimo, da za vsak polinom $f(x) \in V$ velja formula

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{p_1(x_1)} p_1(x) + \dots + \frac{f(x_n)}{p_n(x_n)} p_n(x)$$

Odtod sledi, da so polinomi $p_i(x)$ ogrodje. Obe strani formule imata namreč stopnjo $\leq n-1$ in se ujemata v n različnih točkah $x_1, \dots, x_n$.

Obstoj baze

Spomnimo se, da je ogrodje vektorskega prostora V taka končna podmnožica v V , da je njena linearna ogrinjača enaka V .

Definicija

Vektorski prostor je **končno-razsežen**, če ima ogrodje. Če ima ogrodje z n elementi, nima pa ogrodja z $n - 1$ elementi, potem je **n -razsežen**.

Trditev 1

Podmnožica S vektorskega prostora je baza natanko tedaj, ko je ogrodje in ko nobena prava podmnožica v S ni ogrodje.

Dokaz: Če je S ogrodje in če nobena prava podmnožica v S ni ogrodje, potem za vsak $v \in S$ velja $v \notin \text{Lin}(S \setminus \{v\})$ (sicer bi iz $v \in \text{Lin}(S \setminus \{v\})$ in $S \setminus \{v\} \subseteq \text{Lin}(S \setminus \{v\})$ sledilo $S \subseteq \text{Lin}(S \setminus \{v\})$, odtod pa bi sledilo $\text{Lin } S \subseteq \text{Lin}(S \setminus \{v\})$, torej bi bila prava podmnožica $S \setminus \{v\}$ ogrodje.) Odtod po karakterizaciji linearno neodvisnih množic sledi, da je S linearno neodvisna. Torej je S baza. Dokaz v obratno smer je podoben.

Oglejmo si nekaj posledic prejšnje trditve.

Izrek 2 - Obstoj baze

Vsak končno-razsežen vektorski prostor ima bazo. (Če je n -razsežen, ima bazo z n elementi.) Vsako ogrodje ima podmnožico, ki je baza.

Dokaz: Naj bo V končno-razsežen vektorski prostor in naj bo S ogrodje z najmanj elementi. (Če je V n -razsežen, ima S n elementov.) Potem nobena prava podmnožica v S ni ogrodje, saj ima manj elementov kot S . Torej je S baza po trditvi.

Naj bo T ogrodje. Med vsemi podmnožicami v T , ki so tudi ogrodje, izberimo tako, ki ima najmanj elementov, in jo označimo z S . Nobena prava podmnožica v S ni ogrodje, saj je podmnožica v T in ima manj elementov kot S . Po trditvi je S baza. Ta baza je vsebovana v T . □

Opomba: Trivialni vektorski prostor $\{0\}$ je 0-razsežen. Njegova baza je prazna množica $\{\}$. To sledi iz dogovora $\text{Lin}\{\} = \{0\}$.

Primeri iz obstoja baze

Zanima nas, kako za dano množico $\{v_1, \dots, v_m\} \subset F^n$ preverimo ali je ogrodje in kako poiščemo tako njeno podmnožico, ki je baza. Matriko $\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix}$ z Gaussovo metodo prevedemo v reducirano vrstično stopničasto formo R . Če ima R ničelno vrstico, potem $\{v_1, \dots, v_m\}$ ni ogrodje. Če R nima ničelne vrstice in če so $i_1, \dots, i_n$ zaporedne številke njenih pivotnih stolpcev potem je množica $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ baza za F^n . Utemeljitev: Če matriko $\begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{bmatrix}$ z leve množimo z elementarno matriko, se ohranijo vse linearne relacije med stolpci.

Primer te metode

Pokažimo, da so stolpci matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ogrodje za F^4 in poiščimo take štiri stolpce, ki so baza za F^4 .

Z Gaussovo metodo izračunamo njeno reducirano vrstično kanonično formo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ker matrika R nima ničelne vrstice, so stolci matrike A ogrodje za F^4 . Zaporedne številke pivotnih stolpcev v R so 1, 2, 3, 5. Stolpci v A z istimi zaporednimi številkami so potem baza za F^4 . Iz R lahko odčitamo tudi, kako se s temi stolpci izražata preostala stolpca matrike A .

Primer: $F[x]$ ni končno-razsežen

Spomnimo se, da je $F[x]$ vektorski prostor vseh polinomov v x s koeficienti iz F . Množica $\{1, x, x^2, \dots\}$ je ogrodje $F[x]$. Če bi imeli končno ogrodje $\{p_1, \dots, p_n\}$, potem bi vsak polinom p iz $F[x]$ lahko izrazili kot $p = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$, odkoder bi sledilo $\deg p \leq \max\{\deg p_1, \dots, \deg p_n\}$, kar je protislovje, saj imajo lahko polinomi poljubno visoko stopnjo.

Enoličnost moči baze

Radi bi dokazali, da imajo vse baze istega vektorskega prostora enako elementov. Začnimo s pomožno trditvijo.

Trditev 2

Naj bo V vektorski prostor. Če so $u_1, \dots, u_m$ linearno neodvisni vektorji v V in če so vektorji $v_1, \dots, v_n$ ogrodje za V , potem je $m \leq n$.

Dokaz: Vsak vektor u_i razvijmo po vektorjih v_j :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{1,1}v_1 + \dots + \alpha_{1,n}v_n \\ &\vdots \\ u_m &= \alpha_{m,1}v_1 + \dots + \alpha_{m,n}v_n \end{aligned} \tag{1}$$

Privzemimo sedaj, da je $m > n$ in poskušajmo dobiti protislovje.

Ker ima vsak podoločen homogen sistem netrivialno rešitev, obstajajo taki skalarji $x_1, \dots, x_m$, ki niso vsi enaki nič, da velja:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,1}x_m &= 0 \\
 &\vdots \\
 \alpha_{1,n}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_m &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Iz (1) in (2) sledi

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m x_i u_i &= \sum_{i=1}^m x_i (\alpha_{i,1} v_1 + \dots + \alpha_{i,n} v_n) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i,1} x_i \right) v_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i,n} x_i \right) v_n \\
 &= 0 v_1 + \dots + 0 v_n = 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Ker so vektorji $u_1, \dots, u_m$ linearno neodvisni, sledi iz (3), da je $x_1 = \dots = x_m = 0$. To je v protislovju z izbiro $x_1, \dots, x_m$. Predpostavka $m > n$ je torej napačna. □

Oglejmo si nekaj posledic te trditve.

Izrek 3 - Enoličnost moči baze

Če je V n -razsežen vektorski prostor, potem velja:

- Če so $u_1, \dots, u_m \in V$ linearno neodvisni, je $m \leq n$.
- Če so $u_1, \dots, u_m \in V$ ogrodje, je $m \geq n$.
- Če so $u_1, \dots, u_m \in V$ baza, je $m = n$.

Dokaz: Ker je V n -razsežen vektorski prostor, ima bazo z n elementi, recimo $v_1, \dots, v_n$. Vemo, da je vsaka baza linearno neodvisna in ogrodje.

Prvo točko dokažemo takole. Ker so $u_1, \dots, u_m$ linearno neodvisni in ker so $v_1, \dots, v_n$ ogrodje, je po Trditvi 2 $m \leq n$.

Drugo točko dokažemo takole. Ker so $u_1, \dots, u_m$ ogrodje in ker so $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni, je po Trditvi 2 $n \leq m$.

Očitno tretja točka sledi iz prvih dveh. □

Posledica izrekov 2 in 3

Vektorski prostor je n -razsežen natanko tedaj, ko ima bazo iz n elementov.

Primer iz enoličnosti moči baze

Naj bo F polje in S neskončna množica. Pokažimo, da vektorski prostor F^S vseh funkcij iz S v F ni končno-razsežen. Recimo, da ima F^S ogrodje iz n elementov. Konstruirali bomo linearno neodvisno množico v F^S , ki ima $n + 1$ elementov, kar je v nasprotju z Izrekom 3.

Za vsak $s \in S$ označimo z δ_s funkcijo, ki pošlje element s v 1, elemente iz $S \setminus \{s\}$ pa v nič. Ker je S neskončna množica, lahko izberemo $n + 1$ paroma različnih elementov $s_1, \dots, s_{n+1} \in S$. Pokažimo, da so funkcije $\delta_{s_1}, \dots, \delta_{s_{n+1}}$ linearno neodvisne. Recimo, da velja

$$\alpha_1 \delta_{s_1} + \dots + \alpha_{n+1} \delta_{s_{n+1}} = 0$$

za neke skalarje $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in F$. Potem ze vsak $x \in S$ velja

$$\alpha_1 \delta_{s_1}(x) + \dots + \alpha_{n+1} \delta_{s_{n+1}}(x) = 0$$

Ko vstavimo $x = s_i$ za $i = 1, \dots, n + 1$, in upoštevamo $\delta_j(s_i) = 0$ za vsak $j \neq i$, dobimo $\alpha_i \delta_{s_i}(s_i) = 0$. Ker je $\delta_{s_i}(s_i) = 1$, sledi $\alpha_i = 0$.

Dopolnitev linearno neodvisne množice do baze

V tem razdelku bomo dokazali, da vsako linearno množico dopolnimo do baze. Začnimo z pomožno trditvijo.

Trditev 3

Če so vektorji $v_1, \dots, v_m$ linearno neodvisni, in če vektor v_{m+1} ne leži v njihovi linearni ogrinjači, potem so tudi vektorji $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ linearno neodvisni.

Dokaz: Recimo, da so vektorji $v_1, \dots, v_m$ linearno neodvisni, in da vektor v_{m+1} ne leži v njihovi linearni ogrinjači. Vzemimo take $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, da velja $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$. Radi bi dokazali, da velja $\alpha_1 = \dots, \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$. Ločimo dva primera.

Če je $\alpha_{m+1} \neq 0$, potem velja $v_{m+1} = \frac{-1}{\alpha_{m+1}}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m)$, kar je v nasprotju s predpostavko, da v_{m+1} ne leži v linearni ogrinjači $v_1, \dots, v_m$.

Če je $\alpha_{m+1} = 0$, potem velja $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$. Ker so vektorji $v_1, \dots, v_m$ linearno neodvisni, je $\alpha_1 = \dots, \alpha_m = 0$. □

Trditev 4

Naj bo V n -razsežen vektorski prostor. Vsaka linearno neodvisna množica v V , ki ima n elementov, je baza.

Dokaz: Če so vektorji $v_1, \dots, v_n \in V$ linearno neodvisni, niso pa baza, potem niso ogrodje. Torej obstaja tak vektor v_{n+1} , ki ne leži v linearni ogrinjači vektorjev $v_1, \dots, v_n$. Po Trditvi 3 si vektorji $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ linearno neodvisni. Ker je V n -razsežen, ima ogrodje z n elementi. Po Trditvi 2 ima vsaka linearno neodvisna množica manj ali enako elementov kot vsako ogrodje. Torej je $n + 1 \leq n$, kar je protislovje. $\square$

Izrek 4 - Dopolnitev do baze

Vsaka linearno neodvisna množica v končno-razsežnem vektorskem prostoru je vsebovana v neki bazi.

Dokaz: Če je V n -razsežen vektorski prostor in so vektorji $v_1, \dots, v_m \in V$ linearno neodvisni, potem je $m \leq n$ po Izreku 3. Če je $m = n$, potem so vektorji $v_1, \dots, v_m$ baza po Trditvi 4. Če je $m < n$, potem:

- Izberimo tak $v_{m+1} \in V$, da $v_{m+1} \notin \text{Lin}\{v_1, \dots, v_m\}$.
- Izberimo tak $v_{m+2} \in V$, da $v_{m+2} \notin \text{Lin}\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$.
- Izberimo tak $v_{m+3} \in V$, da $v_{m+3} \notin \text{Lin}\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}\}$.
- ...
- Izberimo tak $v_n \in V$, da $v_n \notin \text{Lin}\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}\}$.

Obstoj takih $v_{m+1}, \dots, v_n$ sledi iz dejstva, da nobena podmnožica v n razsežnem prostoru, ki ima manj kot n elementov, ni ogrodje (drugi del Izreka 3). Če $n - m$ krat uporabimo Trditev 3, dobimo, da so vektorji $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ linearno neodvisni. Po Trditvi 4 so torej baza. $\square$

Primer iz dopolnjevanja linearno neodvisnih množic

Zanima nas, kako za dano množico $\{v_1, \dots, v_m\}$ v F^n ugotovimo ali je linearno neodvisna in kako jo dopolnimo do baze. Tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m & e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix}$$

kjer je $e_1, \dots, e_n$ standardna baza za F^n . Z Gaussovo metodo prevedemo matriko A na reducirano vrstično stopničasto formo R .

Zaporedne številke pivotnih stolpcev matrike R naj bodo $i_1, \dots, i_n$.

Vektorji $v_1, \dots, v_m$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko velja $i_1 = 1$ in $\dots$ in $i_m = m$. Stolpci v A z zaporednimi številkami $i_{m+1}, \dots, i_n$ so potem dopolnitev množice $\{v_1, \dots, v_m\}$ do baze.

Primer

Dopolni vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

Najprej tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Njena reducirana vrstična stopničasta forma je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Njeni pivotni stolpci imajo zaporedne številke 1, 2, 3 in 5. Torej sta

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linearno neodvisna in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ju dopolnita do baze.

Povzetek - Karakterizacije baz in razsežnosti

Povzemimo vse karakterizacije baz v en izrek.

Povzetek 1

Za vsako podmnožico S v n -razsežnem prostoru V so ekvivalentne trditve:

- S je baza.
- S je linearno neodvisna in je ogrodje.
- S je linearno neodvisna in ima n elementov.
- S je ogrodje in ima n elementov.
- S je linearno neodvisna in nima nobene prave linearno neodvisne nadmnožice.
- S je ogrodje in nima nobene prave podmnožice, ki bi bila ogrodje.

Povzemimo še vse karakterizacije razsežnosti v en izrek.

Povzetek 2

Za vsak vektorski prostor V so ekvivalentne naslednje trditve:

- V je n -razsežen.
- V ima ogrodje z n elementi, nima pa ogrodja z $n - 1$ elementi.
- V ima bazo z n elementi.
- V ima linearno neodvisno množico z n elementi, nima pa linearno neodvisne množice z $n + 1$ elementi.