

Opomba: V konkretnih vektorskih prostorih
 imamo tudi bolj konkretne karakterizacije
 linearno neodvisnih vektorjev

Recimo za vektorje $v_1, \dots, v_m \in F^n$

tvorimo matriko $A = [v_1 \dots v_m]$.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. $v_1, \dots, v_m$ so LN

2. Iz $Ax = 0$ sledi $x = 0$

3. Reducirana ^{vrstična} stopničasta forma matrike A

$$\text{je } \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Obstaja taka matrika B, da velja $BA = I$

$\nearrow \quad \uparrow$
 $m \times n \quad m \times m$

Dokaz

$1 \Rightarrow 2$ Iz karakterizacije: $v_1, \dots, v_m$ so LN

$\Leftrightarrow$ Iz $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$ sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

$1 \Rightarrow 3$ Če je $R = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underbrace{0 \dots 0}_{\text{soLK}} & \underbrace{1}_{\text{soLK}} & \underbrace{x \dots x}_{\text{preostali}} & \underbrace{0 \dots 0}_{\text{preostali}} \\ \hline & & \underbrace{1 \dots 1}_{\text{soLK}} & \underbrace{x \dots x}_{\text{preostali}} \\ & & & \underbrace{1 \dots 1}_{\text{soLK}} & \underbrace{x \dots x}_{\text{preostali}} \\ & & & & \ddots \end{array} \right]$

Nepivotski stolpci soLK pivotski stolpci
 če so stolpci LN, potem so nepivotski stolpci

• $3 \Rightarrow 4$ Po 3 obstajajo take elementarne
matrice $E_1 \dots E_m$, da velja

$$E_m \dots E_1 A = D = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Množimo z leve z $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ in dobimo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} E_m \dots E_1 A}_B = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = I$$

$4 \Rightarrow 2$ Če obstaja tak B , da je $BA = I$,

potem iz $Ax = 0$ sledi $\underbrace{BA}x = 0$,

odtod pa sledi $I\vec{x} = 0$, $\overset{I}{\text{se pravi}} x = 0$.

Torej velja točka 2.

x_1, x_2, x_3 paroma različni elementi F

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= (x-x_2)(x-x_3) \\ p_2(x) &= (x-x_1)(x-x_3) \\ p_3(x) &= (x-x_1)(x-x_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{elementi } F[x]_{\leq 2} \\ &\uparrow \\ &\text{polinomi stopnje} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Radi bi dokazali, da so $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$
baza za $F[x]_2$

Dokaz lineare neodvisnosti:

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

$$\alpha_1 (x-x_2)(x-x_3) + \alpha_2 (x-x_1)(x-x_3) + \alpha_3 (x-x_1)(x-x_2) = 0$$

$$\text{Vstavimo } x = x_1 \quad \underbrace{\alpha_1 (x_1-x_2)(x_1-x_3)}_{\neq 0} + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$x = x_2 \quad 0 + \underbrace{\alpha_2 (x_2-x_1)(x_2-x_3)}_{\neq 0} + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

Dokažimo, da so p_1, p_2, p_3 ogradye

Vzemimo poljubni polinom $f(x) \in F[x]_2$

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_1) \frac{p_1(x)}{p_1(x_1)} + f(x_2) \frac{p_2(x)}{p_2(x_2)} + f(x_3) \frac{p_3(x)}{p_3(x_3)}$$

levo in desna stran se ujemata v x_1, x_2 in x_3

levo in desna stran sta stopnje ≤ 2

Torej sta leva in desna stran enaka