

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

16. predavanje: Geodetke – krivulje z najmanjšo dolžino

V tem predavanju bomo uporabili metode variacijskega računa za izračun diferencialne enačbe za **geodetke** v poljubni **Riemannovi metriki** na $\mathbb{R}^n$. Geodetke so krivulje z (lokalno) najmanjšo dolžino. Analiza takih krivulj je ena od pomembnih tem **diferencialne geometrije**.

Riemannova metrika podaja način merjenja dolžin vektorjev in kotov med njimi. Natančno, Riemannova metrika g na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je predpis, ki v vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ podaja skalarni produkt $g_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Tak skalarni produkt je podan s simetrično pozitivno definitno matriko

$$G(\mathbf{x}) = (g_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

in je definiran na paru vektorjev $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ z

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = G(\mathbf{x})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = G(\mathbf{x})\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) v_i w_j.$$

Uvedemo oznako za normo vektorja:

$$\|\mathbf{v}\|_g^2 = g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) v_i v_j.$$

Simbolično pišemo $g_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j$.

Nekaj primerov Riemannovih metrik

Primer 1: Evklidska metrika je podana z identično matriko $G(\mathbf{x}) = \text{Id}$; torej je $g_{\mathbf{x}}$ običajen evklidski skalarni produkt, ki ni odvisen od bazne točke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad g = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2 = ds^2.$$

Primer 2: Če je $D \subset \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ domena in $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija, je **prva fundamentalna forma** ploskve $S = \mathbf{x}(D) \subset \mathbb{R}^n$ enaka

$$g_{(u,v)} = |\mathbf{x}_u|^2 du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) du dv + |\mathbf{x}_v|^2 dv^2; \quad G = \begin{pmatrix} |\mathbf{x}_u|^2 & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & |\mathbf{x}_v|^2 \end{pmatrix}.$$

Za poljuben par vektorjev $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ velja

$$g_{(u,v)}(\xi, \eta) = d\mathbf{x}(u, v)\xi \cdot d\mathbf{x}(u, v)\eta.$$

Vektorja ξ, η na $\mathbb{R}^2$ torej **potisnemo naprej** na $\mathbb{R}^n$ z diferencialom $d\mathbf{x}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ in vzamemo njun evklidski skalarni produkt. **Pravimo, da smo evklidsko metriko na $\mathbb{R}^n$ povlekli nazaj z imerzijo $\mathbf{x}$:**

$$g = \mathbf{x}^*(ds^2) = |dx_1|^2 + |dx_2|^2 + \cdots + |dx_n|^2.$$

Izometrije in Nashev vložitveni izrek

To idejo lahko uporabimo za poljubno imerzijo $\mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. Analogno definiramo pojem **izometrije**. Naj bosta g in g' Riemannovi metriki na domenah $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Difeomorfizem $f : D \rightarrow D'$ se imenuje **izometrija** med danim parom metrik, če velja

$$g'_{f(x)}(df_x \mathbf{v}, df_x \mathbf{w}) = g_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x} \in D, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Izometričnih metrik v diferencialni geometriji med seboj ne ločimo.

Eden najpomembnejših rezultatov diferencialne geometrije je naslednji izrek, ki ga je dokal **John Nash (1956)** (The beautiful mind).

Izrek (Nashev vložitveni izrek)

Za vsako domeno $D \subset \mathbb{R}^n$ z gladko Riemannovo metriko g obstaja gladka vložitev $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ za nek dovolj velik $N = N(n) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$g = f^*(ds^2) = f^*(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_N^2) = |df_1|^2 + \cdots + |df_N|^2.$$

Torej je g povlek Riemannove metrike na $\mathbb{R}^N$ z vložitvijo f (prva fundamentalna forma vložene ploskve $S = f(D) \subset \mathbb{R}^N$).

Izrek velja v splošnejšem primeru, ko je (D, g) **Riemannova mnogoterost**, to je gladka mnogoterost opremljena z Riemannovo metriko g .

Primer 3: Sferična metrika na $\mathbb{R}^n$ je podana z

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^2} \text{Id}, \quad g_{\mathbf{x}} = \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

To metriko dobimo tako, da enotno sfero $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stereografsko projiciramo na $\mathbb{R}^n$ iz severnega pola $N = (0, \dots, 0, 1)$; preslikava $g : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ je difeomorfizem. Če Riemannovo metriko na $\mathbb{R}^{n+1}$ povlečemo na $\mathbb{R}^n$ z $g^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ (kot v primeru 2), dobimo zgornjo formulo.

Primer 4: Poincaréjeva metrika na enotni krogli $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ je metrika

$$g_{\mathbf{x}} = \frac{1}{(1 - |\mathbf{x}|^2)^2} \sum_{i=1}^n (dx_i)^2, \quad |\mathbf{x}| < 1.$$

Krogla $\mathbb{B}^n$ s to metriko je model **hiperboličnega prostora**; to je prostor z metriko konstantne negativne ukrivljenosti (konkretno, -4).

Še posebej je zanimiv **Poincaréjev disk**, to je enotni disk $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ s Poincaréjevo metriko. **Schwarz-Pickova lema** pove, da so holomorfní avtomorfizmi diska

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}$$

izometrije $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ Poincaréjeve metrike, ki ohranjajo orientacijo.

Konformno ekvivalentne metrike in izotermalne koordinate

V obeh zgornjih primerih je dobljena metrika g oblike

$$g = \lambda ds^2 = \lambda \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

za neko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na domeni. Pravimo, da je taka metrika g **konformno ekvivalentna** evklidski metriki ds^2 . To pomeni, da se spremenijo samo dolžine vektorjev, kot med njimi pa se ohranjajo.

Splošneje, Riemannovi metriki g, g' na $D \subset \mathbb{R}^n$ sta konformno ekvivalentni, če velja $g' = \lambda g$ za neko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na D . V tej zvezi je zanimiv naslednji izrek, ki ga je posebnih primerih dokazal že C. F. Gauss:

Izrek

Za vsako gladko Riemannovo metriko g na disku $D \subset \mathbb{R}^2$ s koordinatami (x, y) obstaja difeomorfizem $f : D \rightarrow D$ (zamenjava koordinat), tako da je

$$f^*g = \lambda(dx^2 + dy^2)$$

za neko gladko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na D .

Konformni izomorfizmi

V novih koordinatah je torej metrika konformno ekvivalentna evklidski metriki. Take koordinate (x, y) se imenujejo **izotermalne koordinate** za dano metriko g . Matrika G take metrike λds^2 je

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{Id}.$$

Difeomorfizmi, ki ohranjajo to obliko metrike (in samo spremenijo funkcijo λ), so **konformni difeomorfizmi**, kar pomeni, da ohranjajo kote med vektorji, ne pa nujno njihovih dolžin.

Iz osnovne kompleksne analize vemo, da so konformni difeomorfizmi med domenami v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ravno biholomorfne preslikave (če ohranjajo orientacijo) ali pa njihove kompleksne konjugiranke (če orientacijo obrnejo).

Dolžina poti

Naj bo

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j$$

Riemannova metrika na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : [a, b] \rightarrow D$ zvezno odvedljiva pot. Njena dolžina v metriki g je

$$\ell_g(\mathbf{x}) = \int_a^b \sqrt{g_{\mathbf{x}(t)}(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t)} dt.$$

Podobno kot v evklidskem primeru si ogledamo dolžino poti od $t = a$ do variabilnega časa $t \in [a, b]$:

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|_{g(\mathbf{x}(\tau))} d\tau = \int_a^t \sqrt{g_{\mathbf{x}(\tau)}(\dot{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau))} d\tau.$$

Torej je

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g(\mathbf{x}(t))} \geq 0,$$

zato je $s(t)$ monotono naraščajoča funkcija $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell_g(\mathbf{x})]$.

Naravni parameter poti

Če je $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in [a, b]$ (v tem primeru pravimo, da je pot **regularna** ali **imerzirana**), je funkcija $s(t)$ strogo naraščajoča in lahko izrazimo t kot funkcijo s , $t = t(s)$. Če sedaj definiramo pot

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(t(s)), \quad s \in [0, \ell(\mathbf{x})],$$

(torej smo pot $\mathbf{x}(t)$ reparametrizirali), dobimo

$$\mathbf{y}'(s) = \dot{\mathbf{x}}(t(s))t'(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{x}}(t(s))$$

in zato

$$\|\mathbf{y}'(s)\|_{g(\mathbf{y}(s))} = \frac{1}{\dot{s}(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g(\mathbf{x}(t))} = 1.$$

Torej ima hitrostni vektor poti $\mathbf{y}(s)$ v vsaki točki dolžino ena. Pravimo, da je s **naravni parameter** na poti $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(t(s))$.

V nadaljevanju lahko brez izgube splošnosti obravnavamo poti z naravnim parametrom.

Poti minimalne dolžine — geodetke

Naloga: poišči pot najmanjše dolžine med dvema točkama.

Gladke poti (razreda $\mathcal{C}^2$), ki na vsakem dovolj kratkem segmentu minimizirajo dolžino poti med krajiščema, se imenujejo **geodetke**.

Videli bomo, da lokalno obstaja natanko ena geodetka skozi dano točko p s predpisanim hitrostnim vektorjem $\mathbf{v}$ v tej točki. Če spremenimo velikost hitrostnega vektorja (ne pa tudi smer), se spremeni parametrizacija, dobimo pa isto krivuljo. Geodetke v različnih smereh napolnijo **geodetski disk**.

Globalno lahko med dvema točkama obstaja več geodetk. Npr., geodetke na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ so preseki sfere s hiperravninami skozi $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dve točki sfere določata natanko eno sklenjeno geodetko, torej dve geodetki različnih dolžin, razen če sta antipodni in tedaj določata šop geodetk. Poti letal med dvema točkama na sferi v principu sledijo geodetki, razen za morebitne modifikacije zaradi vetrov, vojaških spopadov, izbruhov vulkanov, ...

Geodetke na Poincaréjevem disku $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ so loki na krožnicah, ki sekajo robno krožnico $\partial\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ pravokotno.

Sedaj bomo z Lagrangejevo variacijsko metodo poiskali diferencialno enačbo 2. reda za geodetke v poljubni Riemannovi metriki na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$.

Postavitev problema

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena in

$$g_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j, \quad \mathbf{x} \in D$$

neka Riemannova metrika na D . Naj bo $\mathbf{x}(t) \in D$ dvakrat zvezno odvedljiva pot na intervalu $t \in [0, b]$, parametrizirana z naravnim parametrom, torej je

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \equiv 1.$$

Vzemimo poljubno $\mathcal{C}^2$ pot

$$\mathbf{h} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(b) = 0$$

in si oglejmo dolžino poti $\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t)$ za majhne vrednosti parametra $s \in \mathbb{R}$.

Najprej izračunajmo linearni člen norme $\|\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t)\|_g^2$ v spremenljivki s .

Prva variacija norme tangentnega vektorja

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)+s\mathbf{h}(t)}}^2 &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t))(\dot{x}_i(t) + s\dot{h}_i(t))(\dot{x}_j(t) + s\dot{h}_j(t)) \\ &= \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)}} + 2s \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i(t)\dot{h}_j(t) \\ &\quad + s \sum_{l=1}^n h_l(t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t) + O(s^2).\end{aligned}$$

Odtod dobimo

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)+s\mathbf{h}(t)}}^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i(t)\dot{h}_j(t) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n h_l(t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t).\end{aligned}$$

Prva variacija dolžine

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \ell_g(\mathbf{x} + s\mathbf{h}) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_0^b \sqrt{\|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_g^2} dt \\&= \int_0^b \frac{\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_g^2}{2\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_g} dt \\&= \int_0^b \left(\sum_{i,l=1}^n g_{il}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{h}_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n h_l \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j \right) dt \\&= \sum_{l=1}^n \int_0^b \left(\sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{h}_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j h_l \right) dt.\end{aligned}$$

To velja za vse poti $\mathbf{h}$ z ničelnimi vrednostmi v krajiščih. Iz Razmadzejeve leme (oz. z integracijo prvega člena v zgornjem integralu per partes) sledi

$$2 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{x}(t))}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Prvi člen na levi v zgornji formuli je enak

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}(t)) \ddot{x}_i + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i \dot{x}_j \\ = 2 \sum_{i=1}^n g_{li}(\mathbf{x}(t)) \ddot{x}_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \right) \dot{x}_i \dot{x}_j \end{aligned}$$

Vstavimo v prejšnjo formulo in dobimo za vsak $l = 1, \dots, n$ enačbo

$$2 \sum_{i=1}^n g_{li} \ddot{x}_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0.$$

Označimo z $G^{-1} = (g^{ij})$ inverzno matriko matrike $G = (g_{ij})$. Pomnožimo enačbo z g^{kl} in seštejemo po l ter upoštevajmo $\sum_{l=1}^n g^{kl} g_{li} = \delta_{ik}$:

$$\ddot{x}_k + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Diferencialna enačba geodetsk

Koeficienti

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

se imenujejo **Christoffelovi simboli**; to so funkcije bazne točke $\mathbf{x}$, ki se naravno pojavijo pri **kovariantnih odvodih** v **Levi-Civita povezavi** (connection), ki pripada metriki g . (Glej M.P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, str. 55.)

Diferencialna enačba geodetsk v Riemannovi metriki $g = (g_{ij})$ je torej

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

To je sistem navadnih kvazilinearnih diferencialnih enačb drugega reda, ki so kvadratično homogene: če je $\mathbf{x}(t)$ rešitev, je tudi $\mathbf{x}(ct)$ rešitev za vsak $c \in \mathbb{R}$.

Geometrijsko ta sistem enačb pomeni, da ima pot $\mathbf{x}(t)$ pospešek (drugi odvod) enak 0 v smislu kovariantnega odvoda:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{x}}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) \equiv 0.$$

Glej M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, str. 62. Odtod sledi tudi, da ima vsaka rešitev konstantno hitrost $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_g = \text{const.}$

Geodetska krogla

Eksistenčni izrek pove, da za vsako točko $\mathbf{p} \in D \subset \mathbb{R}^n$ in vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ obstaja natanko ena (lokalna) geodetka

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v}); \quad \gamma(0; \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}, \quad \dot{\gamma}(0; \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Iz diferencialne enačbe sledi naslednja lastnost homogenosti:

$$\gamma(t; \mathbf{p}, c\mathbf{v}) = \gamma(ct; \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Torej zadošča opazovati geodetke s hitrostnimi vektorji $\mathbf{v}$ na enotni g -sferi $S = \{\|\mathbf{v}\|_{g_{\mathbf{p}}} = 1\} \subset T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$. Za dovolj majhen $r > 0$ so tedaj vse geodetke $\gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in S$) definirane na intervalu $t \in [-r_0, r_0]$. Preslikava

$$\exp_{\mathbf{p}}(t\mathbf{v}) = \gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in S, \quad t \in [0, r_0]$$

je difeomorfizem metrične krogle $B_{r_0} = \{t\mathbf{v} : \mathbf{v} \in S, t \in [0, r_0]\}$ polmera r_0 na geodetsko kroglo $\exp_{\mathbf{p}}(B_{r_0}) \subset D$. Radialni polmeri krogle B_{r_0} se preslikajo v paroma disjunktno geodetske loke od $\mathbf{p}$ do robnih točk sfere $\exp_{\mathbf{p}}(r_0 S)$.

Dokaz, da geodetke lokalno minimizirajo dolžino, lahko najdemo v do Carmo, *Riemannian Geometry*, Proposition 3.6, str. 70.

Metrike, konformno ekvivalentne evklidski metriki

Izračunajmo Christoffelove koeficiente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

v primeru, ko je $g = \mu(\mathbf{x}) \sum_i dx_i^2$ konformno ekvivalentna evklidski metriki:

$$g_{ii} = \mu > 0, \quad g^{ii} = 1/\mu, \quad g_{ij} = 0 = g^{ij} \quad \text{za } i \neq j.$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Naj bo $n = 2$.

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_2}$$

$$-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_2}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1}$$

V matrični obliki:

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \mu_{x_1} & \mu_{x_2} \\ \mu_{x_2} & -\mu_{x_1} \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} -\mu_{x_2} & \mu_{x_1} \\ \mu_{x_1} & \mu_{x_2} \end{pmatrix}$$

Enačba geodetsk:

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{2\mu} \left(\mu_{x_1}^2 (\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) - 2\mu_{x_2}^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \right) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{2\mu} \left(\mu_{x_2}^2 (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) - 2\mu_{x_1}^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \right) = 0$$

Enačba geodetk v sferični metriki

Sferična metrika:

$$\mu = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^2$$

$$\mu_x = -\frac{4x}{(1+x^2+y^2)^3}, \quad \mu_y = -\frac{4y}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{1}{2\mu}\mu_x^2 = \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^4}, \quad \frac{1}{2\mu}\mu_y^2 = \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

Enačba geodetk metrike $g = \mu \cdot (dx^2 + dy^2)$:

$$\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^4}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{16y^2}{(1+x^2+y^2)^4}\dot{x}\dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^4}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \frac{16x^2}{(1+x^2+y^2)^4}\dot{x}\dot{y} = 0.$$

Geodetke sferične metrike skozi $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Če izberemo $y = 0$, dobimo naslednjo enačbo za x :

$$\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^4} \dot{x}^2 = 0.$$

Ta enačba drugega reda ima natančno eno rešitev z $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v \in \mathbb{R}$.

Dobimo parametrizacijo x osi, torej je x os geodetka.

Analogen argument pokaže, da je y os geodetka.

Splošneje, če izberemo vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ in iščemo rešitve oblike

$$x(t) = h(t)v_1, \quad y(t) = h(t)v_2,$$

dobimo diferencialno enačbo 2. reda za funkcijo $h(t)$; njena rešitev podaja geodetsko parametrizacijo premice $\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbb{R}^2$. Te premice pri stereografski projekciji sfere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ na ravnino $\mathbb{R}^2$ ustrezajo poldnevnikom na S^2 skozi severni pol $(0, 0, 1)$ in južni pol $(0, 0, -1)$.

Geodetko skozi poljubno točko $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ v smeri vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ dobimo z upoštevanjem dejstva, da so ortogonalne rotacije sfere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ izometrije v evklidski metriki. Zato so preseki sfere z ravninami skozi $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ geodetke. Pri stereografski projekciji $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se te krožnice preslikajo v krožnice na $\mathbb{R}^2$. (Seveda pa niso vse krožnice v $\mathbb{R}^2$ geodetke!)

Enačba geodetk v Poincaréjevi metriki

Poincaréjeva metrika na disku $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\mu = \frac{1}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, \quad \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2}(1 - (x^2 + y^2))^2$$

$$\mu_x = \frac{4x}{(1 - (x^2 + y^2))^3}, \quad \mu_y = \frac{4y}{(1 - (x^2 + y^2))^3}$$

$$\frac{1}{2\mu}\mu_x^2 = \frac{8x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}, \quad \frac{1}{2\mu}\mu_y^2 = \frac{8y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}$$

Enačba geodetk Poincaréjeve metrike:

$$\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{16y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}\dot{x}\dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{8y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \frac{16x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}\dot{x}\dot{y} = 0.$$

Geodetke Poincaréjeve metrike

Podobno kot pri enačbi za geodetke sferične metrike vidimo, da so preseki premic skozi $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ z diskom $\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$ geodetke Poincaréjeve metrike.

Nadalje upoštevamo, da so holomorfní avtomorfizmi diska

$$z = x + iy \longmapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

izometrije Poincaréjeve metrike, kot sledi iz Schwarz-Pickove leme. Torej te Möbiusove preslikave preslikajo geodetke v geodetke.

Po drugi strani vemo (Analiza 2), da vsaka Möbiusova preslikava preslika krožnice v krožnice, pri čemer premico razumemo kot krožnico skozi ∞ . Vemo tudi, da so biholomorfne preslikave konformne (ohranjajo kote).

Zaključimo, da so geodetke Poincaréjeve metrike na disku $\mathbb{D}$ preseki z $\mathbb{D}$ tistih krožnic v $\mathbb{C}$, ki sekajo enotno krožnico $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ pravokotno.

Polravnina Lobachevskega

Polravnina Lobachevskega je drug model za Poincaréjev disk.

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad g_L = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Naloga: Preveri, da se $(\mathbb{H}, g_L)$ izometrično preslika na Poincaréjev disk $(\mathbb{D}, g_P)$ s preslikavo

$$z = x + iy \mapsto \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D}.$$

Sedaj je

$$\mu = \frac{1}{y^2}, \quad \mu_x = 0, \quad \mu_y = -\frac{2}{y^3}, \quad \frac{1}{\mu} \mu_y^2 = y^2 \frac{4}{y^6} = \frac{4}{y^4}.$$

Enačba geodetsk:

$$\ddot{x} - \frac{4}{y^4} \dot{x} \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{2}{y^4} (\dot{y}^2 - \dot{x}^2) = 0.$$

Geodetke so preseki preseki s $\mathbb{H}$ krožnic in premic v $\mathbb{R}^2$, ki pravokotno sekajo premico $\partial\mathbb{H} = \{y = 0\}$.