

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

17. predavanje: Variacijski problemi s splošnejšimi robnimi pogoji

Do sedaj smo obravnavali problem iskanja ekstrema funkcionala

$$\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$$

pri robnih pogojih

$$x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

V tem primeru so dopustne variacije v funkcije x vse funkcije iz prostora

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2([a, b]) : v(a) = 0, v(b) = 0\}.$$

Opomba: Klasična oznaka za variacijo je $v = \delta x$. V bistvu so to tangentni vektorji v dani točki x na prostor funkcij, v katerem leži x . Npr., če je to prostor $\{x \in \mathcal{C}^2([a, b]) : x(a) = A, x(b) = B\}$, je tangentni prostor v x zgoraj naveden prostor funkcij v z robnimi vrednostmi 0.

Euler-Lagrangejeva enačba

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in [a, b]$$

velja pod pogojem, da so vse variacije, ki so na krajiščih intervala enake nič, dopustne. Za take variacije sta robna člena v integraciji per partes enaka nič.

Izpeljava Euler-Lagrangejeve enačbe

Ključni del izpeljave Euler-Lagrangejeve enačbe je bil naslednji. Velja:

$$\begin{aligned}(\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt.\end{aligned}$$

Denimo, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj je $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ zvezno odvedljiva po t in lahko drugi člen na desni strani integriramo per partes:

$$\int_a^b L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) dt = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) dt + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) v(t) \Big|_a^b.$$

Formula za smerni odvod (1. variacija v smeri v) je torej

$$\begin{aligned}(\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_a^b \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt \\ &\quad + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) \Big|_a^b.\end{aligned}$$

Primeri splošnejših robnih pogojev

Recimo sedaj, da obravnavamo isti variacijski problem pri splošnejših linearnih robnih pogojih oblike

$$r_k(x) = \alpha_k x(a) + \beta_k \dot{x}(a) + \gamma_k x(b) + \delta_k \dot{x}(b) = a_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Pri linearnih robnih pogojih te oblike še vedno velja, da so vse variacije v , ki so na krajiščih intervala enake nič, dopustne. Odtod dobimo tako kot prej, da mora vsaka ekstremalna funkcija zadoščati Euler-Lagrangejevi enačbi.

Vendar je lahko dopustnih variacij več: poleg tistih z robnimi vrednostmi 0 so sedaj dopustne vse variacije v , ki zadoščajo pogojem

$$r_k(v) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Pri teh dodatnih variacijah ni več samoumevno, da bi bil integrirani člen pri integraciji per partes enak nič; to moramo posebej zahtevati:

$$L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))v(t) \Big|_a^b = 0 \quad \text{za vse dopustne variacije } v.$$

Preveč robnih pogojev seveda škodi v smislu, da tak problem pogosto nima rešitev. Naravno je predpisati največ dva robna pogoja, saj je Euler-Lagrangejeva enačba drugega reda in ima dva prosta parametra.

Naravni primeri robnih pogojev

Poleg že obravnavnega sta dva najbolj pogosta primera naslednja:

- 1 Robnega pogoja v eni ali obeh robnih točkah ni. Npr., vrednost $x(b)$ je poljubna, vrednost $x(a) = A$ pa fiksna. Sedaj se dopustne vse variacije

$$v \in \mathcal{C}^2([a, b]), \quad v(a) = 0.$$

Vrednost $v(b)$ je poljubna in če vzamemo $v(b) = 1$, dobimo poleg Euler-Lagrangejeve enačbe še pogoj

$$L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0.$$

Odtod običajno sledi $\dot{x}(b) = 0$.

- 2 Če ni robnega pogoja v nobenem od krajišč, so dopustne vse variacije $v \in \mathcal{C}^2([a, b])$ in dobimo dodatna pogoja

$$L_{\dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = 0, \quad L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0.$$

- 3 Če je edini robni pogoj $x(a) = x(b)$, so dopustne vse variacije $v \in \mathcal{C}^2([a, b])$, ki zadoščajo $v(a) = v(b)$. V tem primeru dobimo dodatni pogoj

$$L_{\dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)).$$

Brahistokrona ponovno

V tej luči se povrnimo na problem brahistokrone, ki smo ga obravnavali v 15. predavanju. Kroglica pri času $t = 0$ miruje v izhodišču $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, nato pa začne padati po krivulji $y = y(x) < 0$ za $x \in (0, b]$. Zanimalo nas je, po kateri krivulji se naj giblje, da bo čim hitreje prispela na cilj v desno krajišče.

Problem je bil minimizirati funkcional

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}} dx,$$

kjer je $z = z(x) = -y(x) \geq 0$. Z uporabo variacij v , ki so na krajiščih intervala enake nič, smo ugotovili, da mora rešitev zadoščati Beltramijevi identiteti

$$L - z' L_{z'} = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}} - z' \frac{z'}{\sqrt{z(1+z'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} = C \in \mathbb{R}.$$

Če vrednosti v krajišču $x = b$ ne predpišemo, moramo dopustiti tudi variacije v z $v(0) = 0$ in $v(b) = 1$. S tem dobimo dodatni pogoj

$$L_{z'}|_{x=b} = \frac{z'(b)}{\sqrt{z(b)(1+z'(b)^2)}} = 0 \iff z'(b) = 0.$$

Brahistokrona

V 15. predavanju smo videli, da so ekstremalne krivulje te Euler-Lagrangejeve enačbe cikloide

$$x = C(t - \sin t), \quad z = C(1 - \cos t), \quad y = -z = C(\cos t - 1)$$

za poljubno konstanto $C > 0$. Velja

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Pogoj $z'(b) = 0$ je torej ekvivalenten $\sin t = 0$. Prva rešitev s $t > 0$ je $t = \pi$. Vstavimo v $x(t)$ in dobimo

$$x(\pi) = C\pi = b, \quad C = \frac{b}{\pi}.$$

S tem je konstanta C (torej krivulja, po kateri kroglica najhitreje pada) natanko določena in višina padca je

$$y(b) = C(\cos \pi - 1) = -2C = -\frac{2b}{\pi}.$$

Dobljena krivulja je polovica prve zanke cikloide.

Katenoida

Za drugi primer si oglejmo naslednjo nalogo, povezano s katenoido.

V ravnini $x = 0$ v $\mathbb{R}^3$ je dana krožnica $y^2 + z^2 = A^2$. Radi bi jo povezali z ravnino $x = b > 0$ z rotacijsko ploskvijo minimalne ploščine.

Ustreden graf $y(x)$ na intervalu $[0, b]$ ima robno vrednost $y(0) = A > 0$, medtem ko vrednost v desnem krajišču ni predpisana. Iskana funkcija $y(x)$ minimizira integral

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Prirejeni Lagrangian $L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$ je neodvisen od x in problem se prevede na Beltramijevo identiteto:

$$L - y' L_{y'} = y \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \in \mathbb{R}.$$

Dodatni pogoj pri $x = b$ je

$$L_{y'}|_{x=b} = 0 \iff y'(b) = 0.$$

Katenoida

Ekstremalne krivulje, ki smo jih našli v 15.predavanju, so

$$y = C \cosh \left(\frac{x - D}{C} \right), \quad y'(x) = \sinh \left(\frac{x - D}{C} \right).$$

Pogoj $y'(b) = 0$ nam da $D = b$, pogoj $y(0) = A$ pa

$$C \cosh(b/C) = A.$$

Če pišemo $b/C = t$, je enačba

$$\cosh t = A/C = \lambda t, \quad \lambda = A/b.$$

Enačba $\cosh t = \lambda t$ ima dve rešitvi za $\lambda > \lambda_0$, eno dvojno rešitev za $\lambda = \lambda_0$ in nobene rešitve za $\lambda < \lambda_0$, kjer je

$$\lambda_0 \approx 1.50887954 \dots$$

Več tovrstnih problemov bomo obravnavali pri izoperimetričnih problemih.