

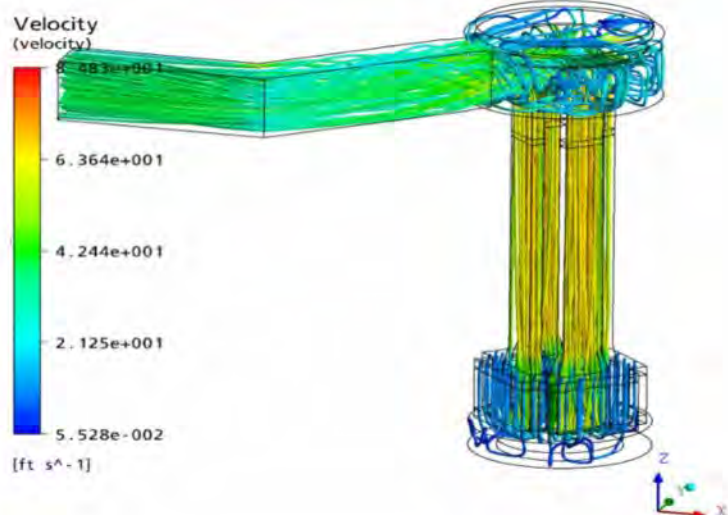
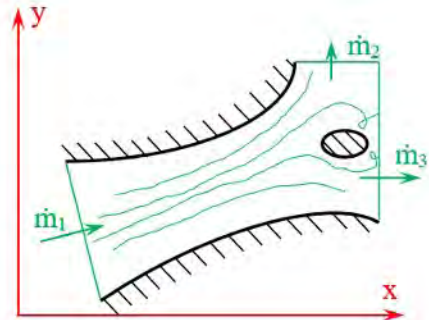
Teorija deformacij (angl.: strain)

Opis gibanja snovi

1 Eulerjev način

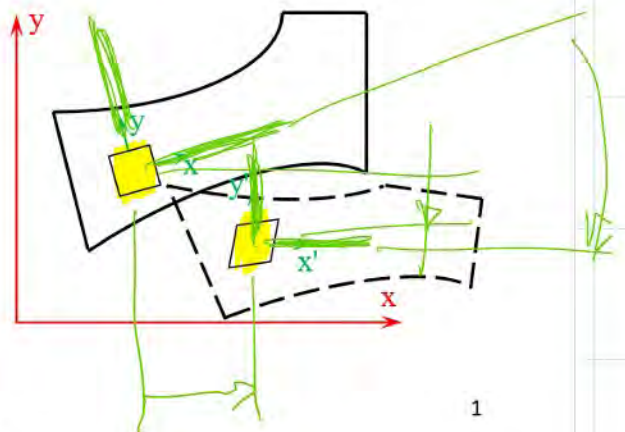
Mirujoč koordinatni sistem. Mirujoče območje opazovanja. Snov prihaja v to območje ($\dot{m}_1$), se giblje skozi to območje in ga zapušča ($\dot{m}_2$ in $\dot{m}_3$). Uporaba: gibanje fluidov (computational fluid dynamics), kontinuirani tehnološki procesi (vlečenje žice, valjanje, tekoči trakovi, cevovodi,...).

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \dots \text{masni tok}$$



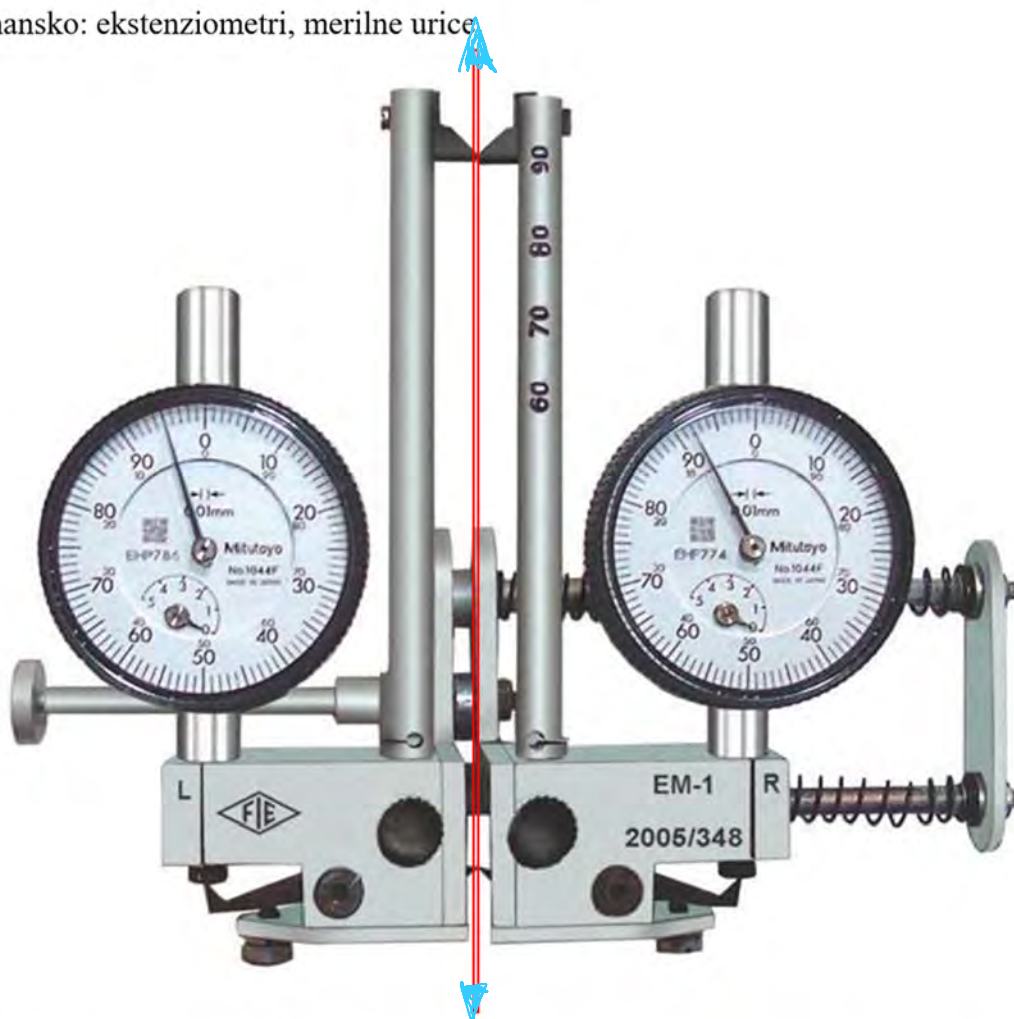
2 Lagrangeov način

Lokalni koordinatni sistem je pritrjen na gibajočo snov. Osi tega sistema med gibanjem spreminjajo orientacijo. Uporaba: deformabilna trdna telesa.

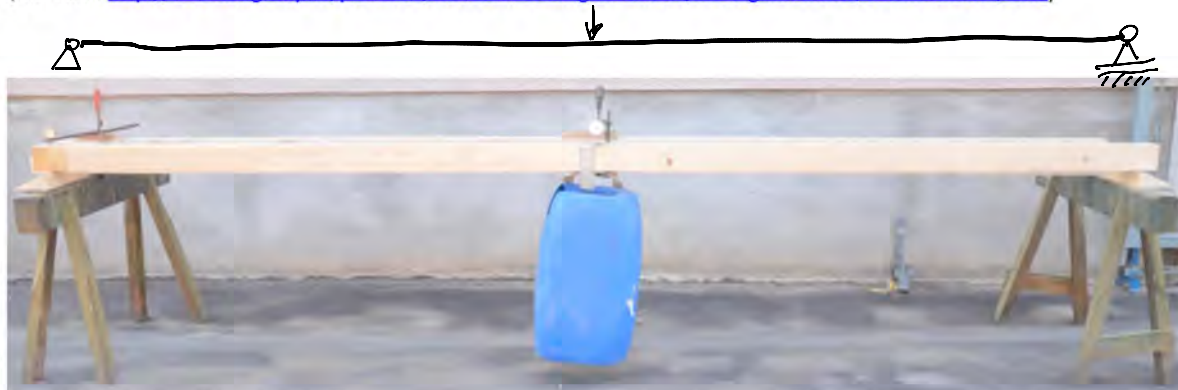


Načini merjenja pomikov in deformacij

- mehansko: ekstenziometri, merilne urice

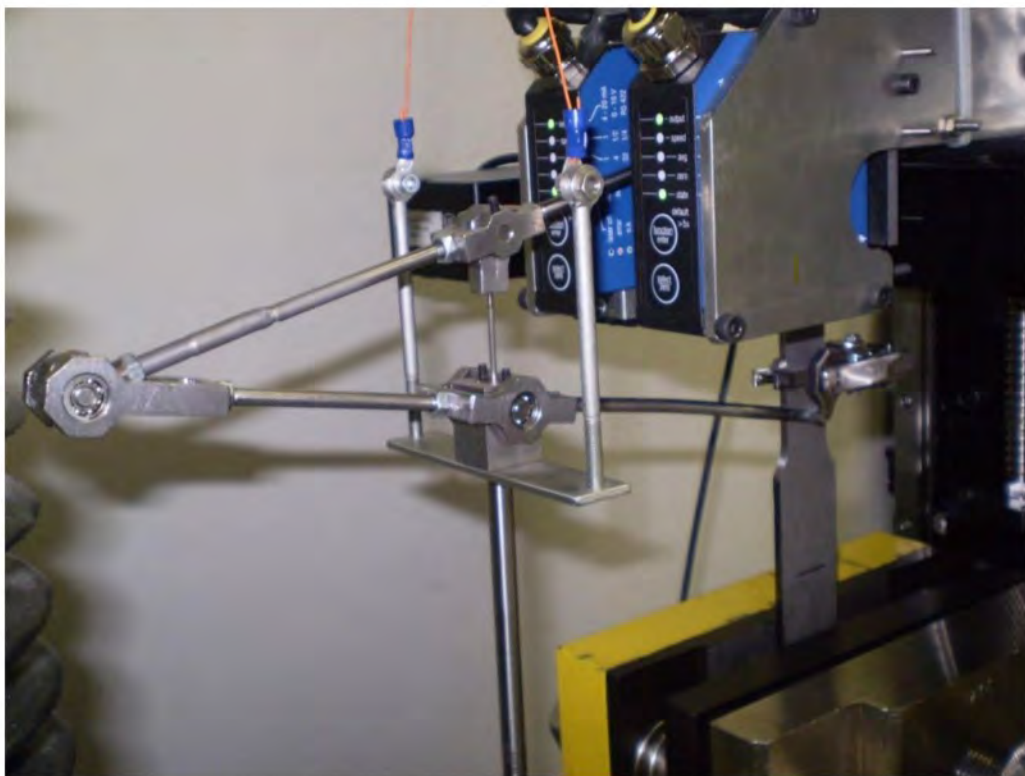


(Vir slike: <http://www.fiegroun.in/products/universal-testing-machines/testing-machines/extensometer/em1>)



(Vir slike: Oražem Anže: Trdnostna analiza in preizkušanje sestavljenega lesenega nosilca s sistemom poševnega moznika, Diplomsko delo Visokošolskega strokovnega študijskega programa 1. stopnje, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 2017)

- elektromehansko: ekstenziometer + LVDT (Linear Variable Differential Transformer)



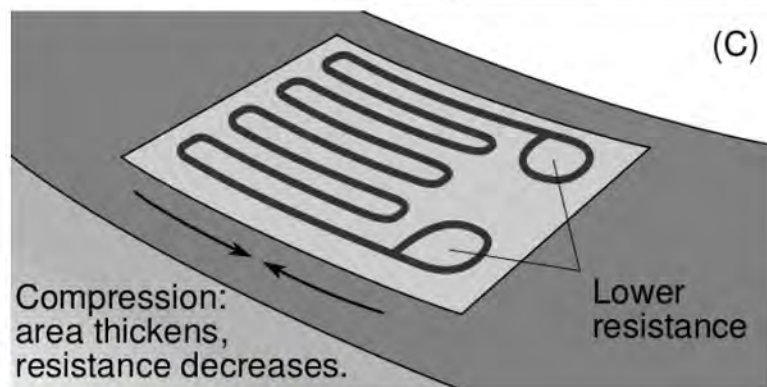
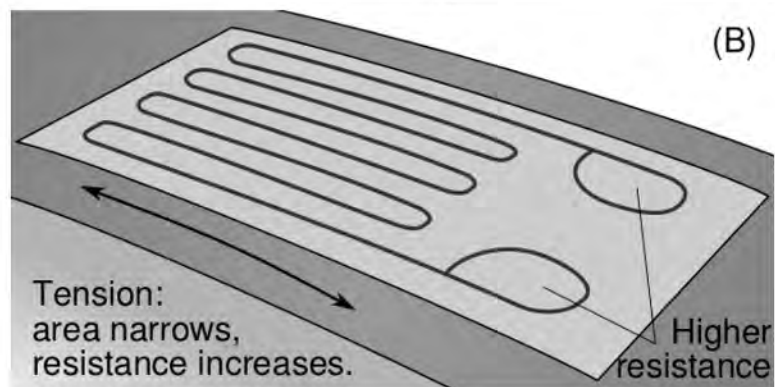
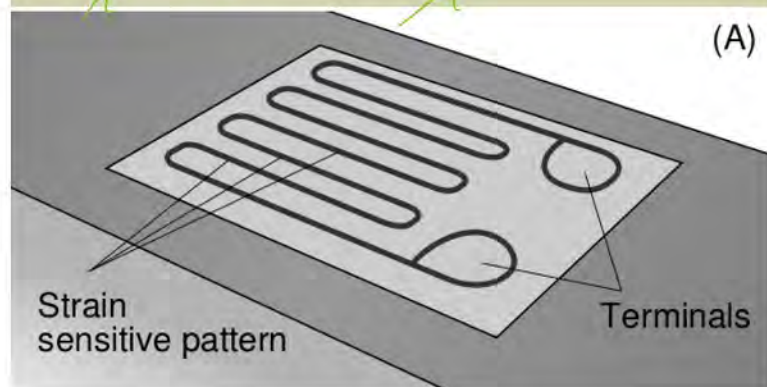
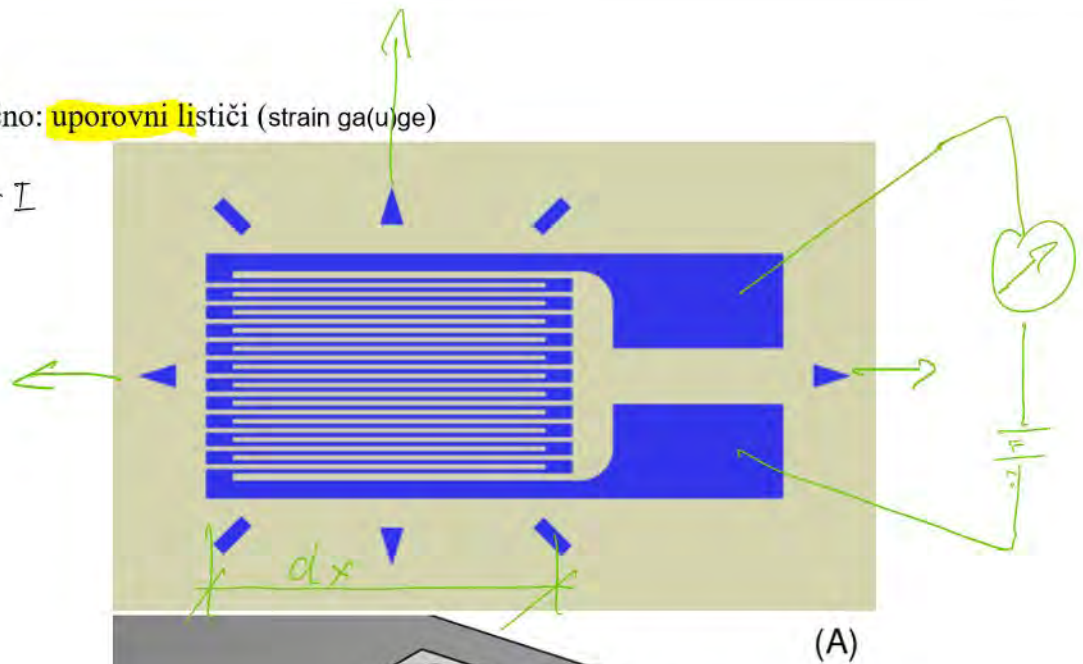
(Vir slik: Kovinoplastika Lož)

Mehanika

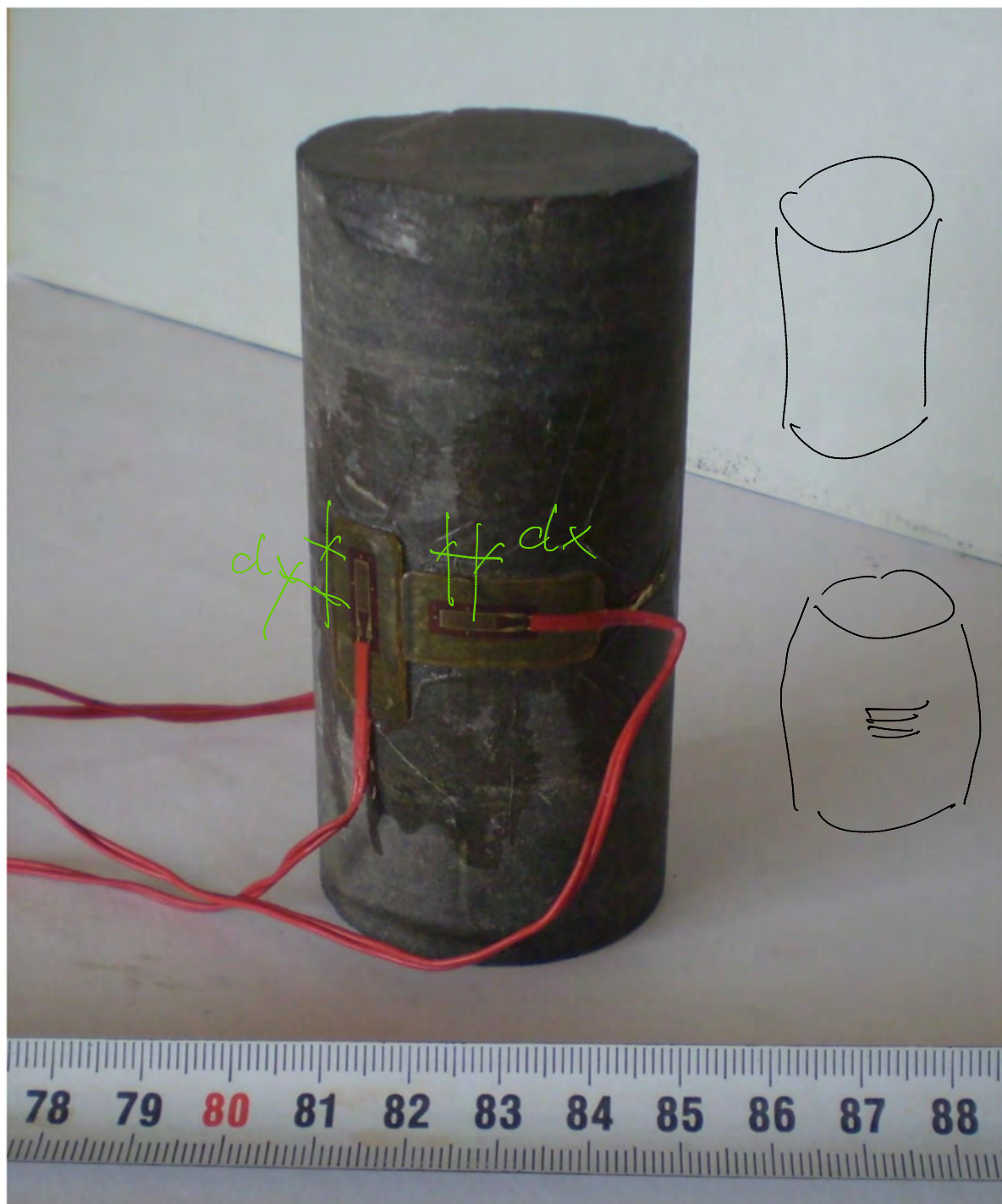
Teorija deformacij

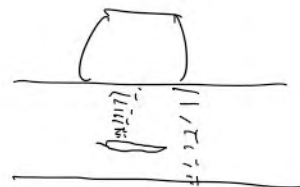
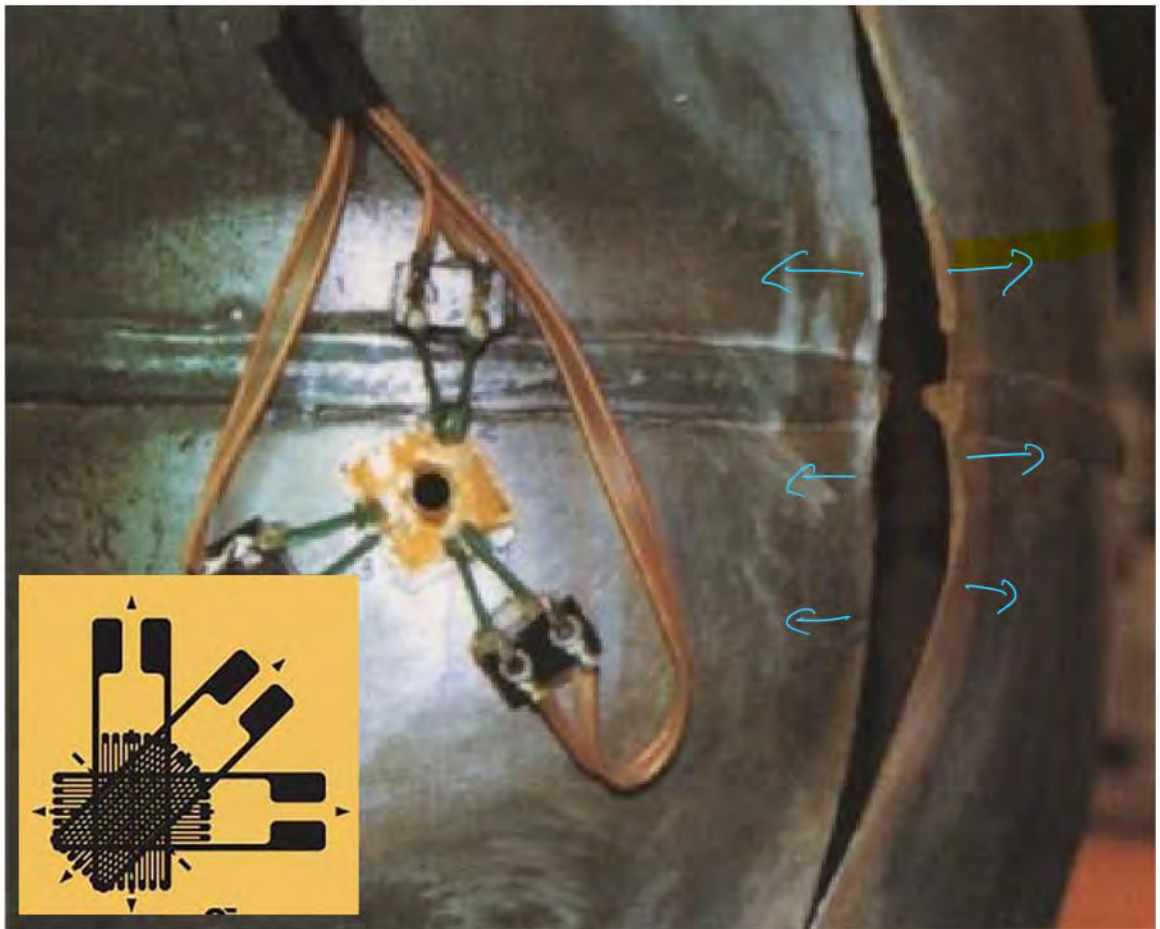
- električno: uporovni lističi (strain ga(u)ge)

$$P = U \cdot I$$



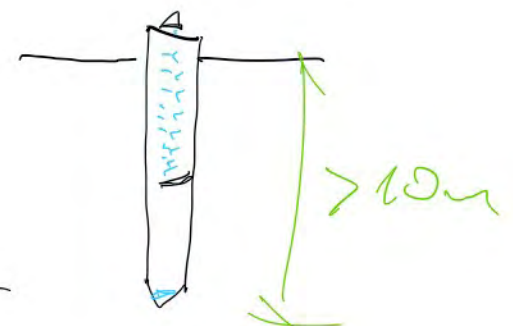
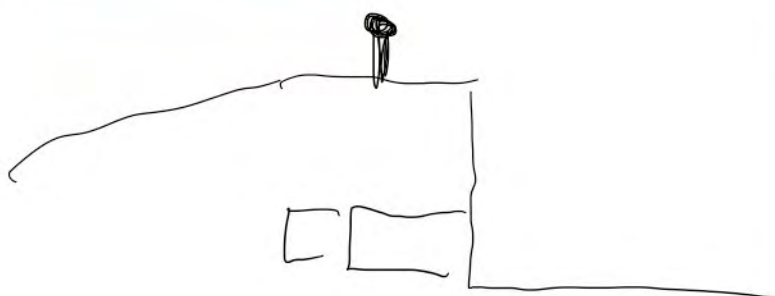
(Vir slik: https://en.wikipedia.org/wiki/Strain_gauge)





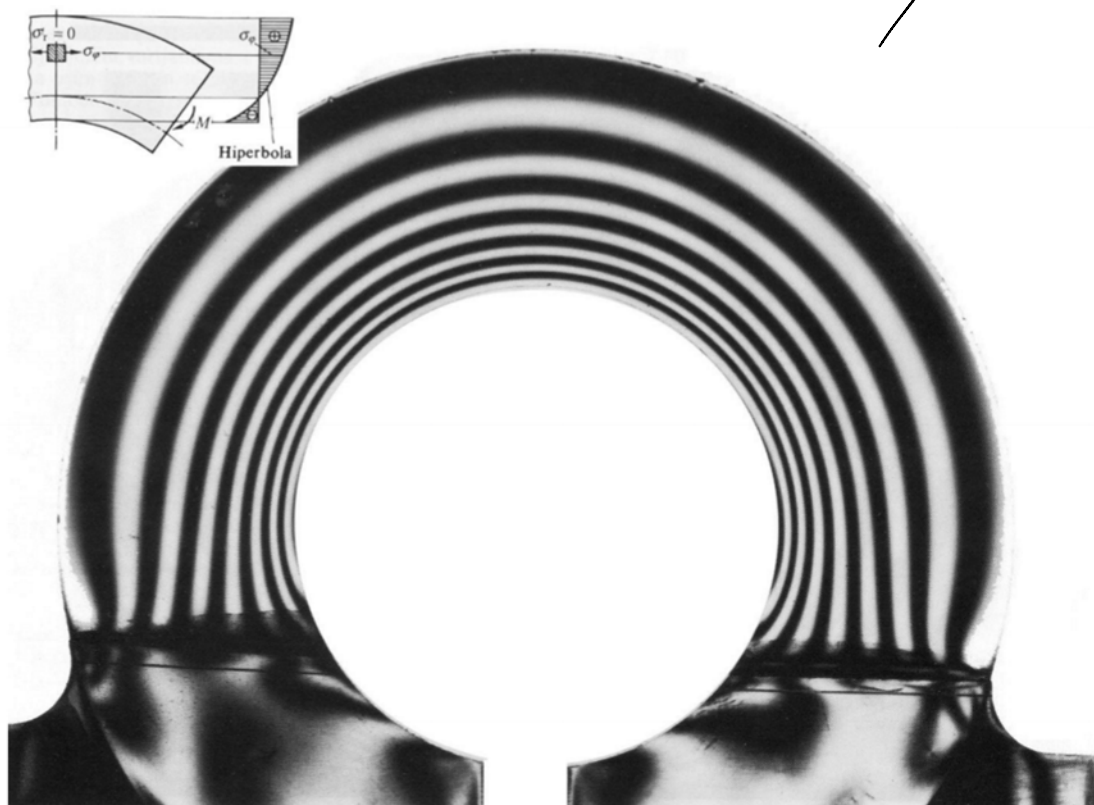
- zvok: ultrazvok (**U**ltrasonic **T**esting)

- EM valovanje: optično, laser (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation), radar (**R**adio **D**etection **A**nd **R**anging), GPS.



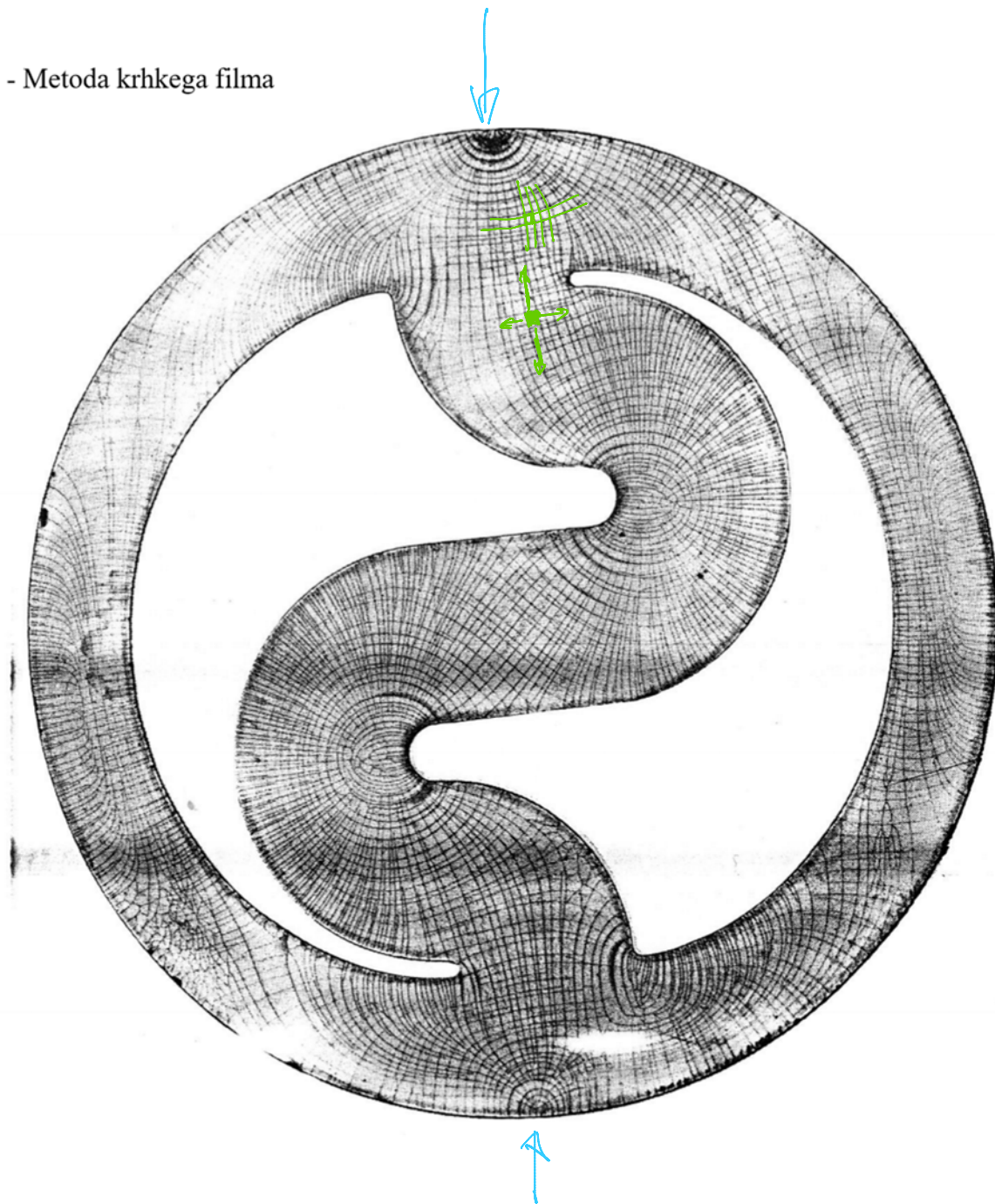
- Fotoelastičnost

Photoelasticity



(Vir slike: Leksikografski zavod "Miroslav Krleža", Zagreb: Tehnička enciklopedija, članek: "Fotoelasticimetrija")

- Metoda krhkega filma

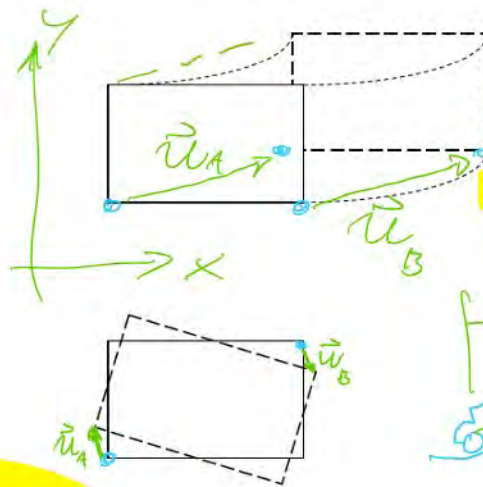


Geometrijska obrazložitev razstavljanja pomikov

a) Translacija

togo telo

b) Rotacija



krivočrtna translacija



c) Deformacija

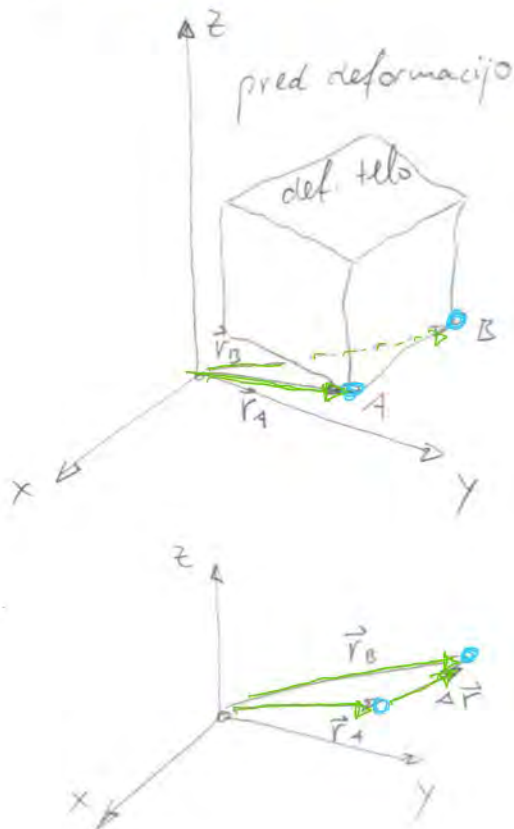
- sprememba volumna: koti ostanejo nespremenjeni
 - (+) dilatacija
 - (-) kompresija

deformabilno telo

- sprememba oblike: **distorzija**



Izpeljava pomiki $\rightarrow$ deformacije



Na def. telesu moramo
poznati pomike točk, oz.
poznamo krajevne vektorje
 $\vec{r}_A, \vec{r}_B \dots$ ✓

$$\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Če sta točki B in A
zelo blizu $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r}$

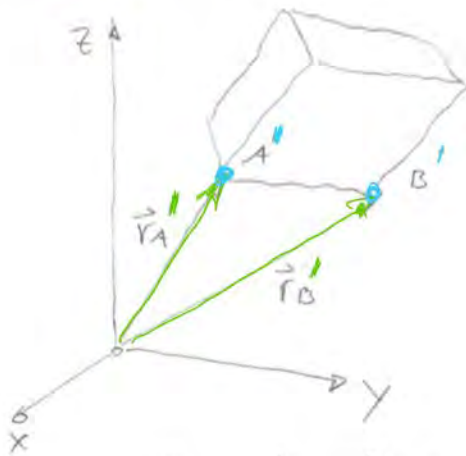
Torej:

$$d\vec{r} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

$$\text{velikost } d\vec{r}: dr = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Telo med deformacijo

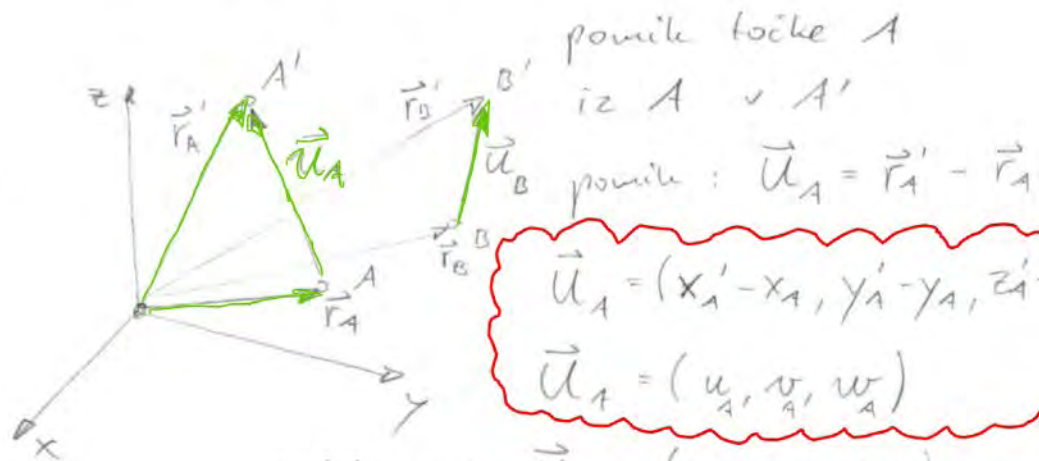


poznati moramo

$$\vec{r}_A', \vec{r}_B' \dots$$

vmesne pozicije telesa
nas ne zanimajo.

Na isto sliko narišemo $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_A'$



pomiki točke A

iz A v A'

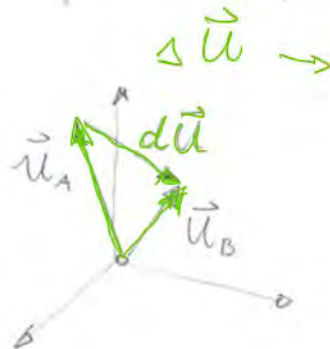
$$\text{pomiki: } \vec{u}_A = \vec{r}_A' - \vec{r}_A$$

$$\vec{u}_A = (x_A' - x_A, y_A' - y_A, z_A' - z_A)$$

$$\vec{u}_A = (u_A, v_A, w_A)$$

$$\text{podobno je } \vec{u}_B = (u_B, v_B, w_B)$$

oba vektorja premikov narišemo skupaj:



$d\vec{u}$... vektor razlike premikov
v dveh sosednjih točkah

$$d\vec{u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A$$

pomazarja vrste
deformacije med A in B

če $\vec{u}_B = \vec{u}_A$... ni deformacije
je transl. pomik

če $\vec{u}_B \neq \vec{u}_A$... rotacija + def.

$$\epsilon_x = \frac{5}{12000} = 0,00025$$

$$\epsilon_x = \frac{3}{30} = 0,1$$

Vektor razlike pomikov $d\vec{U}$ še ni deformacija. Pomembno je, na kolikšni začetni razdalji dr med točkama A in B pride do $d\vec{U}$. Definirajmo vektor specifičnega pomika:

$$\vec{e} = \frac{d\vec{U}}{dr}, \quad \vec{e} = (e_x, e_y, e_z), \quad \left[\frac{m}{m} = 1 \right] \quad [✓] \quad (1)$$

v zgornji enačbi r nima vektorskega značaja. Enačba (1) je podobna enačbi $\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dA}$.

I) Izračun $d\vec{U}$ (števec v zgornji enačbi)

$$\vec{e} = \frac{\vec{U}_B - \vec{U}_A}{dr} \quad (2)$$

če sta A in B dovolj blizu: Taylorjeva vrsta

$$\vec{U}_B = \vec{U}_A + d\vec{U} + \dots \text{zanemarimo višje odvode,} \\ \text{t.j. teorija majhnih pomikov}$$

↑ enačba v skalarini obliki: 3 enačbe

$$\begin{aligned} w_B &= w_A + du = w_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_B &= v_A + dv = v_A + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_B &= w_A + dw = w_A + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3)$$

Komponente vektorja specifičnega pomika, upoštevajoč enačbe (3) so:

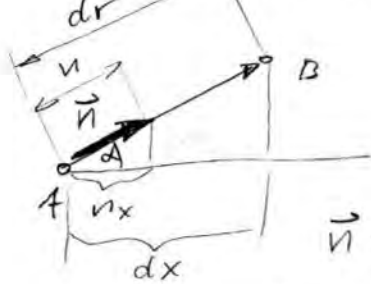
$$e_x = \frac{w_B - w_A}{dr} = \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot \frac{1}{dr} + \frac{\partial u}{\partial y} dy \cdot \frac{1}{dr} + \frac{\partial w}{\partial z} dz \cdot \frac{1}{dr}$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dr}$$

$$e_y = \frac{v_B - v_A}{dr} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dr} \quad (4)$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dr} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dr}$$

II Izračunajna vektorja $d\vec{r}$



izrazimo enotski vektor
daljice $\overline{AB}$ kot vektor $\vec{n}$

$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - splošno

$$\cos \alpha = \frac{n_x}{n} = \frac{dx}{dr}, \quad \cos \beta = \frac{n_y}{n} = \frac{dy}{dr}$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{dr}$$

Torej so v enačbah (4) : $\frac{dx}{dr} = \cos \alpha$, $\frac{dy}{dr} = \cos \beta$, $\frac{dz}{dr} = \cos \gamma$
in dobimo v eksplisitivni obliki:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma$$

~~$\partial u \neq du$~~

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

v tenzorski obliki:

$$\vec{e}_i = [D_{ij}] \vec{n}_j$$

D_{ij} ... tenzor **specifičnega** pomika
podobnost z napetostnim tenzorjem

$$\vec{p}_i = [D_{ij}] \vec{u}_j, \text{ le da } D_{ij} \text{ ni simetričen!}$$

Obrazložitev razstavljanja tenzorja na simetrični in antisimetrični del:

Primer: imejmo nesimetrični tenzor D_{ij} , ki ga zapišemo kot vsoto dveh tenzorjev:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2}(4+2) \\ \frac{1}{2}(2+4) & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(4-2) \\ \frac{1}{2}(2-4) & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{ij} = D_{ij}^{sim} + D_{ij}^{asim}$$

Razstavljanje tenzorja specifičnega pomika na simetrični in antisimetrični del:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

in uvedba oznak ϵ, γ in φ :

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{pmatrix}$$

oz. skrajšano:

$$D_{ij} = \epsilon_{ij} + \varphi_{ij}$$

kjer je ϵ_{ij} tenzor specifičnih deformacij (strain tensor) in φ_{ij} tenzor rotacij.

Tenzor **specifičnih deformacij** je simetričen preko glavne diagonale. V glavni diagonali so zapisane normalne deformacije, izven diagonale so strižne deformacije. Glede strižnih deformacij obstajata dva zapisa: inženirski, s strižnimi deformacijami γ in matematični s strižnimi deformacijami ϵ :

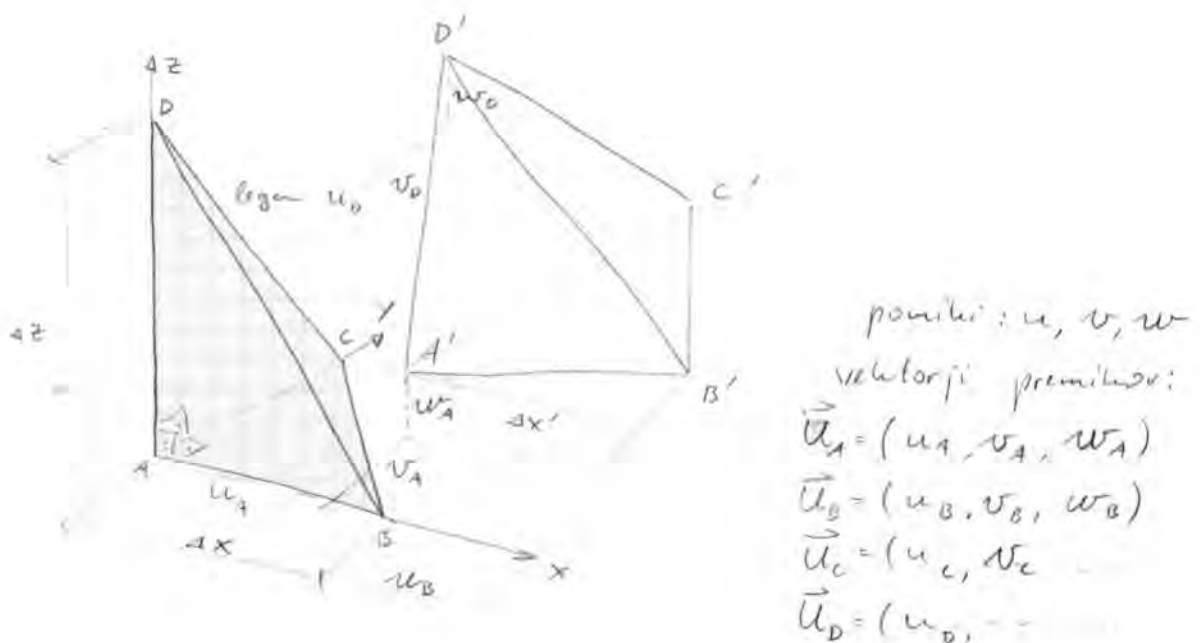
$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

povezava med obema zapisoma strižnih deformacij je: $\frac{1}{2} \gamma_{ij} = \epsilon_{ij}$

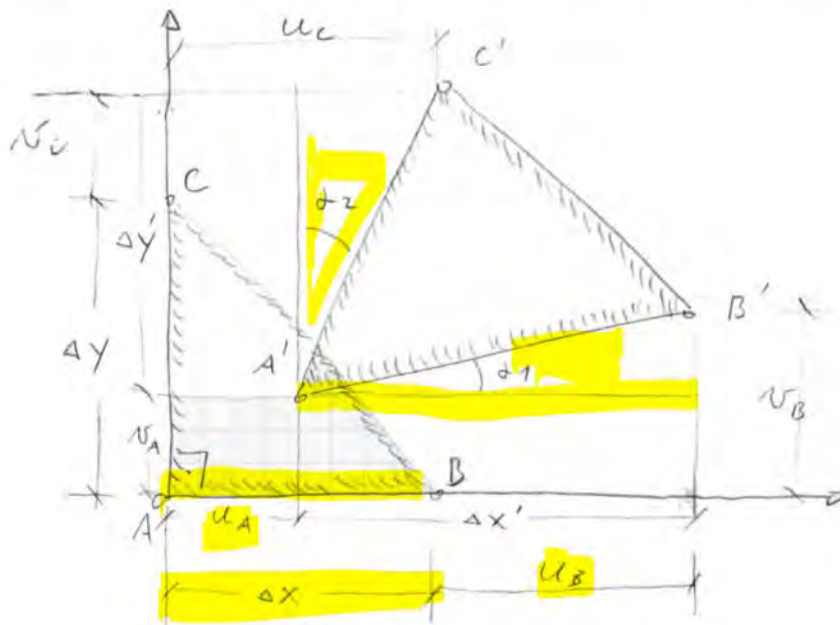
Ste opazili, da sta si tenzor napetosti in tenzor specifičnih deformacij podobna po strukturi, lastnostih?

Geometrijska ponazoritev deformacij

Iz elementarnega delca izrežemo en vogal tako, da dobimo tetraeder z oglišči A, B, C in D. Ogljišče A je tisto s samimi pravimi koti med robovi tetraedra, pri drugih ogliščih so koti ostri (manj kot 90°). Pred deformacijo je oglišče A v koordinatnem izhodišču, med deformacijo pa se tetraeder premakne, zarotira in deformira v lego, ki je na spodnji sliki označena z oglišči A', B', C' in D'.



Na spodnji sliki je prikazana projekcija tetraedra pred in med deformacijo na ravnino x-y.



Daljica $\overline{AB}$ se premakne v $\overline{A'B'}$. Pri tem dobi novo lego in novo dolžino.

Skrajša:

osnovna dolžina: $\overline{AB} = \Delta x$

deformirana dolžina: $\overline{A'B'} = \Delta x'$

iz slike: $\Delta x + u_B = u_A + \Delta x'$

razlika dolžin: $\Delta x' - \Delta x = u_B - u_A$

definicija specifične deformacije:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_B - u_A}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad [\text{brez enote}]$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

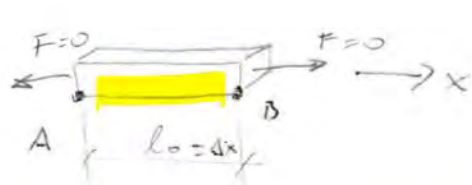
$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

normalne spec. def.

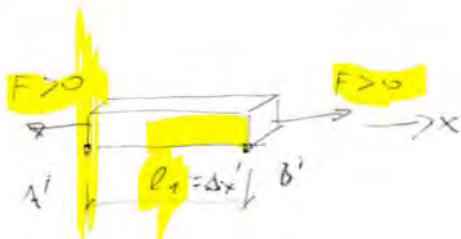
spec. dolž.

zrc. dolž.

Poenostavljen prikaz normalne specifične deformacije ϵ_x :



predpostavke: enosmerno napr. stanje
prečne def. nas ne zanimajo



$$l_0 = \Delta x$$

$$l_1 = \Delta x'$$

$$u_A = 0$$

$$u_B = l_1 - l_0$$

$$v_A = 0$$

$$v_B = 0$$

$$w_A = 0$$

$$w_B = 0$$

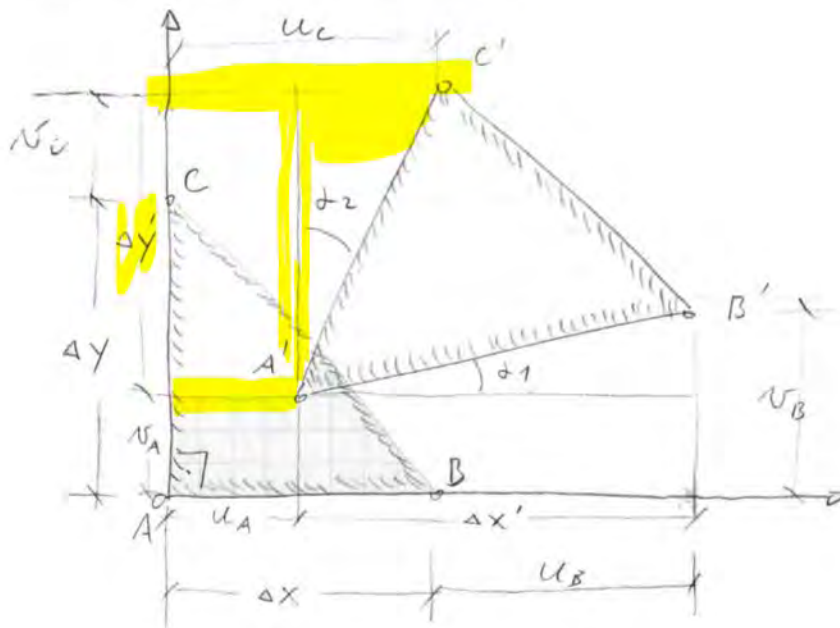
$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x}$$

pri homogenih deformacijah: $\frac{du}{dx} = \text{konst}$
limita nima smisla

$$\epsilon_x = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\text{sprememba dolžine}}{\text{začetna dolžina}}$$

$$\text{sprememba dolžine} = \epsilon \cdot \text{začetna dolžina}$$

Geometrijski pomen strižnih deformacij:



$$\angle(C'A'B') = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_B - v_A}{\Delta x'}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{u_C - u_A}{\Delta y'}$$

specifična tang. def. (pri majhnih α velja $\tan \alpha \approx \alpha$).

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{v_B - v_A}{\Delta x'} + \lim_{\Delta y' \rightarrow 0} \frac{u_C - u_A}{\Delta y'}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

strižne
def.

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

ϵ_{ij} — tehnične kotne deformacije
tenzorske kotne def: $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}$

Glavne deformacije

Vse izpeljave so enake, kot pri napetostnem tenzorju.

Povzetek: glavne deformacije ε_1 , ε_2 in ε_3 dobimo z razrešitvijo determinante:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_n & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_n & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_n \end{vmatrix} = 0$$

Kubični polinom: $\varepsilon_n^3 - I_1 \varepsilon_n^2 + I_2 \varepsilon_n + I_3 = 0$

pri tem so I_1, I_2, I_3 invariante
velja, da $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

Vrste deformacijskih stanj

če $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ --- prostorsko deformacijsko stanje

če $\varepsilon_i = 0, \varepsilon_j \neq 0, \varepsilon_k \neq 0$ R D, S.

primer: jez, cev

ravninsko deformac.
stanje



enosno def. stanje: statično stanje

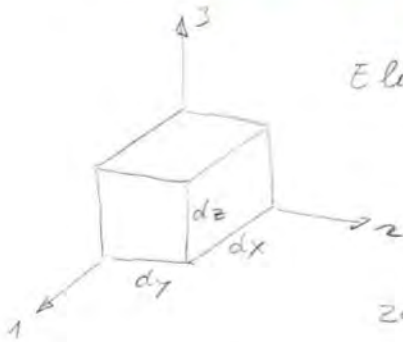


ni deformacije
vrtolomni smeri

Prva invarianta deformacijskega tenzorja

nap. $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

def. $I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{const.}$

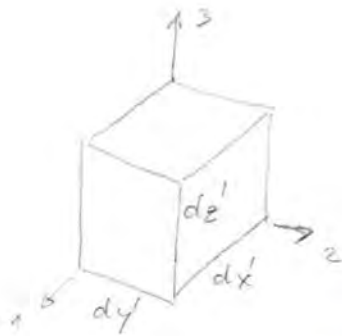


Elementarni kvader orientiran v smeri glavnih napetosti $\Rightarrow$ v smeri glavnih deformacij.

Začetni volumen: $dV_0 = dx \cdot dy \cdot dz$

v deformirani stanju: ϵ ni tang. nap. ni tang.

def. oblika elementa ostane kvader (ni meje kroča)



deformirani volumen:

$$dV' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

pri tem je: $dx' = dx + \epsilon_x dx$

$$dx' = (1 + \epsilon_x) dx$$

$$dy' = (1 + \epsilon_y) dy$$

$$dz' = (1 + \epsilon_z) dz$$

$$\epsilon_x = \frac{l' - l_0}{l_0}$$

$$dV' = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) dx \cdot dy \cdot dz = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) dV_0$$

sprememba volumena (specifična)

$$\frac{dV' - dV_0}{dV_0} = \frac{(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \cdot dV_0 - dV_0}{dV_0}$$

$$\frac{dV' - dV_0}{dV_0} = \frac{dV_0}{dV_0} \left[(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \right]$$

zanemarimo

$$= 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \cancel{\epsilon_x \epsilon_y} + \cancel{\epsilon_y \epsilon_z} + \cancel{\epsilon_z \epsilon_x} + \cancel{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z} - 1$$

≈ 0

$$\frac{dV' - dV_0}{dV_0} \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_v$$

ϵ_v imenujemo **volumska dilatacija**.

Ravninsko deformacijsko stanje

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\alpha) + \epsilon_{xy} \sin(2\alpha)$$

$\sigma_{ij} \Rightarrow \epsilon_{ij}$

$$\epsilon_{xyn} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin(2\alpha) + \epsilon_{xy} \cos(2\alpha)$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

Vaje pri poglavju Teorija deformacij

1. naloga

Delec konstrukcije, določen z oglišči A, B, C in D, leži v ravnini x-y kartezijskega koordinatnega sistema. Za te točke so izmerjene koordinate točk pred in med deformacijo.

Izračunajte: a) vektorje pomikov točk,

b) tenzor specifičnega pomika,

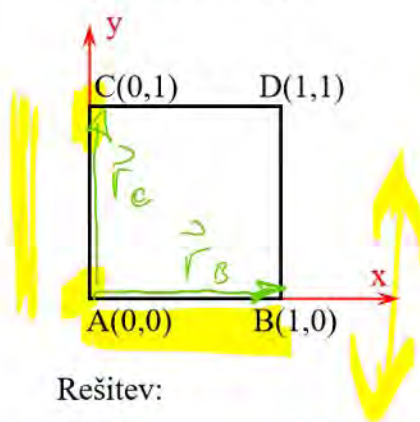
c) tenzor specifične deformacije in tenzor rotacije ter kot zasuka,

č) ugotovite, ali primer še spada med majhne deformacije.

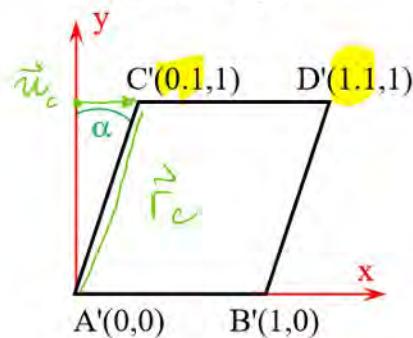
Materialni koordinatni sistem postavite v oglišče A.

Podatki:

pred deformacijo



med deformacijo



$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= 0.1/1 \\ \alpha &= 5.7106^\circ\end{aligned}$$

Rešitev:

- 1) Vektorja pomikov točk B in C glede na točko A sta: $\overline{U}_{AB} = (0,0)$, $\overline{U}_{AC} = (0.1,0)$.
- 2) Na voljo imamo sistem enačb (3), ki ga nekoliko preuredimo za uporabo v 2D:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Neznanke v teh dveh enačbah so vsi štirje parcialni odvodi. Na voljo imamo vektorja pomikov za točki B in C glede na A ter začetne razdalje med A in B ter med A in C. Te podatke vstavimo v zgornji sistem enačb dvakrat; prvič za točki A in B, drugič za točki A in C:

A-B

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial u}{\partial x} 1 + \frac{\partial u}{\partial y} 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 0 &= \frac{\partial v}{\partial x} 1 + \frac{\partial v}{\partial y} 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

A-C

$$\begin{aligned} 0.1 &= \frac{\partial u}{\partial x} 0 + \frac{\partial u}{\partial y} 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0.1 \\ 0 &= \frac{\partial v}{\partial x} 0 + \frac{\partial v}{\partial y} 1 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

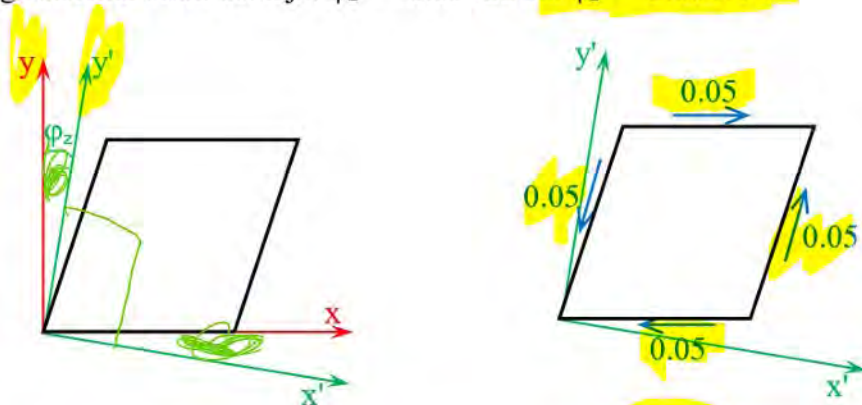
Tenzor specifičnega pomika sedaj zapišemo:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Razstavimo D_{ij} na simetrični in antisimetrični del:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.05 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ -0.05 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij} + \varphi_{ij}$$

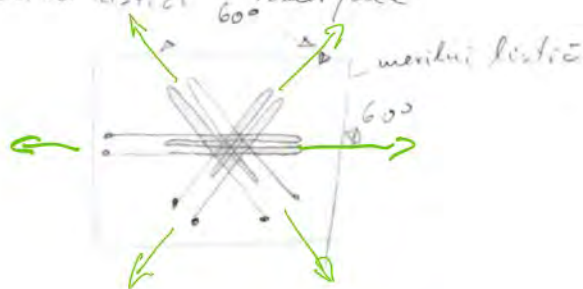
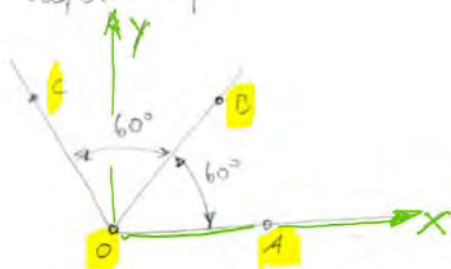
Zasuk koordinatnega sistema okoli osi z je: $\varphi_z = -0.05$ rad oz. $\varphi_z = -2.86479^\circ$.



4) Iz podatkov je razvidno, da se stranica kvadra nagne za kot $\alpha = 5.7106^\circ$. Iz izračuna pa dobimo, da se koordinatni sistem zasuče za $\varphi_z = 0.05$ rad (zanemarimo predznak), znotraj tega sistema pa se stranica kvadra nagne še za $\varepsilon_{xy} = 0.05$ rad. Skupno $\varphi_z + \varepsilon_{xy} = 0.1$ rad, kar je 5.7296° . Razlika, 0.019° pa gre na račun tega, da pomik 0.1 na dolžini 1.0 ni majhen.

2. naloga

Na konstrukciji so z merilnimi lističi 60° izmerjene deformacije:



$$\epsilon_{OA} = 2 \cdot 10^{-3}, \quad \epsilon_{OB} = -1 \cdot 10^{-3}, \quad \epsilon_{OC} = -1 \cdot 10^{-3}$$

Določite komponente def. tenzorja v ravnini $x-y$.
Meritve so v ravnini $x-y$, v smeri z ujemajo podatkov.

v ravnini:

$$I(\hat{u}) \epsilon_n = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\alpha) + \epsilon_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$II(\hat{u}) \epsilon_{\alpha n} = \frac{1}{2} \gamma_n = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin(2\alpha) + \epsilon_{xy} \cos(2\alpha)$$

meritve so :

$$\begin{aligned} \epsilon_{OA} &= \epsilon_n \quad (\alpha = \alpha_A) \\ \epsilon_{OB} &= \epsilon_n \quad (\alpha = \alpha_B) \\ \epsilon_{OC} &= \epsilon_n \quad (\alpha = \alpha_C) \end{aligned}$$

smer x sovpada s smerjo $\overrightarrow{OA}$, torej

$$\begin{aligned} \alpha_A &= 0 \\ \alpha_B &= 60^\circ \\ \alpha_C &= 120^\circ \end{aligned}$$

enačba I ima obliko:

$$\epsilon_n = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \epsilon_{xy} \sin(2\alpha)$$

Za tri meritev imamo tri enačbe:

$$A: \epsilon_{01} = \epsilon_x \cdot \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \epsilon_{xy} \sin(2 \cdot 0^\circ)$$

oz.:

$$2 \cdot 10^{-3} = \epsilon_x \cdot 1 + 0 + 0 \Rightarrow \epsilon_x = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$B: -1 \cdot 10^{-3} = \epsilon_x \cos^2(60^\circ) + \epsilon_y \sin^2(60^\circ) + \epsilon_{xy} \sin 120^\circ$$

$$C: -1 \cdot 10^{-3} = \epsilon_x \cos^2(120^\circ) + \epsilon_y \sin^2(120^\circ) + \epsilon_{xy} \sin 240^\circ$$

$$B: -1 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 + \epsilon_y \cdot 0,75 + \epsilon_{xy} \cdot 0,866$$

$$C: -1 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 + \epsilon_y \cdot 0,75 - \epsilon_{xy} \cdot 0,866$$

seštejemo $-2 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-3} + 1,5 \epsilon_y + 0$

$$\epsilon_y = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{1,5} = -2 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{0,866} \cdot (0,5 \cdot 10^{-3} + -1,5 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{0}{0,866} = 0$$

tenz. spec. def.:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -2 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

obremen glavne def.

