

# Vektorski prostori 3.del

## Razsežnosti podprostorov

Naj bo  $V$  končno-razsežen vektorski prostor. Njegovo razsežnost označimo z  $\dim V$ . Lahko jo definiramo na več ekvivalentnih načinov:

- Kot minimum moči ogrodiv za  $V$ .
- Kot moč katerekoli baze za  $V$ . (Vse baze imajo enako moč.)
- Kot maksimum moči linearno neodvisnih množic v  $V$ .

Če  $V$  ni končno-razsežen, potem pišemo  $\dim V = +\infty$ .

### Trditve

Če je  $V$  končno-razsežen vektorski prostor in če je  $U$  vektorski podprostor v  $V$ , potem je tudi  $U$  končno-razsežen vektorski prostor in  $\dim U \leq \dim V$ .

Dokaz: Naj bo  $n = \dim V$ . Če  $\dim U = +\infty$  ali če  $\dim U > n$ , potem  $U$  nima ogrodiva z  $\leq n$  elementi. Torej obstajajo taki  $u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in U$  da  $u_1 \notin \text{Lin}\{\}$ ,  $u_2 \notin \text{Lin}\{u_1\}$ ,  $u_3 \notin \text{Lin}\{u_1, u_2\}$ ,  $\dots, u_{n+1} \notin \text{Lin}\{u_1, \dots, u_n\}$ . Po Trditvi 3 od zadnjic odtod sledi, da so vektorji  $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$  linearno neodvisni v  $U$  (in zato tudi linearno neodvisni v  $V$ ). Toda vsaka linearno neodvisna množica v  $V$  ima največ  $n$  elementov. To je protislovje.

## Trditev (Dimenzijska formula za podprostore)

Če je  $V$  končno-razsežen vektorski prostor in če sta  $U_1$  in  $U_2$  vektorska podprostora v  $V$ , potem velja naslednja formula

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Dokaz: Naj bo  $f_1, \dots, f_k$  baza za podprostor  $U_1 \cap U_2$ . Naj bo  $g_1, \dots, g_l$  njena dopolnitev do baze za  $U_1$  in naj bo  $h_1, \dots, h_m$  njena dopolnitev do baze za  $U_2$ . Dokazali bomo, da je  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l, h_1, \dots, h_m$  baza za  $U_1 + U_2$ . Potem je  $\dim(U_1 + U_2) = k + l + m$ ,  $\dim(U_1 \cap U_2) = k$ ,  $\dim U_1 = k + l$  in  $\dim U_2 = k + m$ . Torej formula v trditvi drži.

Pokažimo najprej, da so  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l, h_1, \dots, h_m$  ogrodje za  $U_1 + U_2$ . Po definiciji vsote dveh podprostorov lahko vsak vektor  $u \in U_1 + U_2$  izrazimo kot  $u = u_1 + u_2$ , kjer  $u_1 \in U_1$  in  $u_2 \in U_2$ . Ker je  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$  baza za  $U_1$ , lahko izrazimo  $u_1$  kot linearno kombinacijo  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$ . Ker je  $f_1, \dots, f_k, h_1, \dots, h_m$  baza za  $U_2$ , lahko izrazimo  $u_2$  kot linearno kombinacijo  $f_1, \dots, f_k, h_1, \dots, h_m$ . Torej lahko  $u$  izrazimo kot linearno kombinacijo  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l, h_1, \dots, h_m$ .

Pokažimo še, da so  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l, h_1, \dots, h_m$  linearno neodvisni. Če  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l + \gamma_1 h_1 + \dots + \gamma_m h_m = 0$ , potem  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = (-\gamma_1) h_1 + \dots + (-\gamma_m) h_m$  leži v  $U_1 \cap U_2$  (ker leva stran leži v  $U_1$ , desna pa v  $U_2$ .) Torej obstajajo taki skalarji  $\delta_1, \dots, \delta_k$ , da je  $(-\gamma_1) h_1 + \dots + (-\gamma_m) h_m = \delta_1 f_1 + \dots + \delta_k f_k$ . Ker je  $f_1, \dots, f_k, h_1, \dots, h_m$  baza za  $U_2$ , odtod sledi  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$  (in  $\delta_1 = \dots = \delta_k = 0$ ). Sledi  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = 0$ . Ker je  $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l$  baza za  $U_1$ , odtod sledi  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$  in  $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$ . Dokaz linearne neodvisnosti je s tem končan.  $\square$

## Posledica dimenzijske formule

Za vsaka podprostora  $U_1$  in  $U_2$  v  $V$  velja  $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim U_1 + \dim U_2$ . Enačaj velja natanko tedaj, ko je  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ .

Dokaz. V dimenzijski formuli upoštevamo, da je  $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 0$  in da velja  $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$  natanko tedaj, ko je  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ .  $\square$

Opomba: Dimenzijsko formulo lahko posplošimo tudi na tri podprostore:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) &= \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \\ &\quad - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \end{aligned}$$

# Direktne vsote podprostorov

Pojme linearne ogrinjače, ogrodja, linearne neodvisnosti in baze lahko posplošimo iz vektorjev na vektorske podprostore. Terminologija ni ista. Posplošitev pojma linearne ogrinjače vektorjev je pojem vsote vektorskih podprostorov.

## Definicija vsote vektorskih podprostorov

**Vsota** vektorskih podprostorov  $U_1, \dots, U_n$  (nekega vektorskega prostora) je vektorski podprostor

$$U_1 + \dots + U_n := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}$$

Opomba: Vektorske podprostore  $U_1, \dots, U_n$  lahko smatramo za “ogrodje” vektorskega prostora  $V$ , če lahko vsak vektor  $v \in V$  na **vsaj en** način izrazimo kot  $v = u_1 + \dots + u_n$ , kjer  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ . To velja natanko tedaj, ko je  $V = U_1 + \dots + U_n$ .

## Definicija (interne) direktne vsote podprostorov

Vsota vektorskih podprostor  $U_1, \dots, U_n$  je **direktna**, če za vsake vektorje  $v_1, w_1 \in U_1, \dots, v_n, w_n \in U_n$ , ki zadoščajo  $v_1 + \dots + v_n = w_1 + \dots + w_n$  velja  $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$ .

Opomba: Vektorske podprostore  $U_1, \dots, U_n$  lahko smatramo za “linearno neodvisne”, če lahko vsak vektor  $v \in V$  na **največ en** način izrazimo kot  $v = u_1 + \dots + u_n$ , kjer  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ . To velja natanko tedaj, ko je vsota  $U_1 + \dots + U_n$  direktna.

Opomba: **Eksterna direktna vsota** podprostorov  $U_1, \dots, U_n$  je definirana kot množica vseh  $n$ -teric  $(u_1, \dots, u_n)$ , kjer  $u_i \in U_i$  za vsak  $i = 1, \dots, n$ . Označimo jo z  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ . Naj bo  $\Phi$  preslikava iz  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  v  $V$ , ki pošlje  $(u_1, \dots, u_n)$  v  $u_1 + \dots + u_n$ . Njena zaloga vrednosti je ravno vsota  $U_1 + \dots + U_n$ . Preslikava  $\Phi$  je injektivna natanko tedaj, ko je vsota  $U_1 + \dots + U_n$  direktna. Torej lahko preko  $\Phi$  identificiramo interno direktno vsoto  $U_1 + \dots + U_n$  z eksterno direktno vsoto  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ . Zato tudi interno direktno vsoto označimo z  $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ .

## Osnovni primer

Za vse vektorje  $v_1, \dots, v_n$  v  $V$  velja

$$\text{Lin}\{v_1\} + \dots + \text{Lin}\{v_n\} = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\}$$

Torej so vektorji  $v_1, \dots, v_n$  ogrodje za  $V$  natanko tedaj, ko velja  $\text{Lin}\{v_1\} + \dots + \text{Lin}\{v_n\} = V$  ( $\Leftrightarrow \text{Lin}\{v_1\}, \dots, \text{Lin}\{v_n\}$  so "ogrodje").

Neničelni vektorji  $v_1, \dots, v_n$  v  $V$  so LN natanko tedaj, ko je vsota  $\text{Lin}\{v_1\} + \dots + \text{Lin}\{v_n\}$  direktna ( $\Leftrightarrow \text{Lin}\{v_1\}, \dots, \text{Lin}\{v_n\}$  so "LN").

D: Vsota  $\text{Lin}\{v_1\} + \dots + \text{Lin}\{v_n\}$  je direktna natanko tedaj, ko za vsake skalarje  $\alpha_i, \beta_j$  velja, da iz  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$  sledi  $\alpha_1 v_1 = \beta_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n = \beta_n v_n$ . Ker so vektorji  $v_1, \dots, v_n$  neničelni je to ekvivalentno lastnosti, da iz  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$  sledi  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ . To pa je ravno linearna neodvisnost  $v_1, \dots, v_n$ .

Opomba: Vektorske podprostore  $U_1, \dots, U_n$  lahko smatramo za "bazo" vektorskega prostora  $V$ , če lahko vsak vektor  $v \in V$  na **natanko en** način izrazimo kot  $v = u_1 + \dots + u_n$ , kjer  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ . To velja natanko tedaj, ko je  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ .

# Karakterizacije direktnih vsot

Direktno vsoto vektorskih podprostorov bi radi opisali na čimveč različnih načinov. Mnoge od teh opisov bomo potrebovali v naslednjih poglavjih.

## Izrek (Karakterizacije direktnih vsot)

Za vsako naravno število  $n$  in za vsake podprostore  $U_1, \dots, U_n$  v vsakem končno-razsežnem vektorskem prostoru  $V$  so ekvivalentne lastnosti:

- (1) Vsota  $U_1 + \dots + U_n$  je direktna.
- (2) Če vektorji  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$  zadoščajo  $u_1 + \dots + u_n = 0$  ( $v \ V$ ), potem velja  $u_1 = \dots = u_n = 0$ .
- (3) Če so  $u_{1,1}, \dots, u_{1,r_1}$  baza za  $U_1$  in  $\dots$  in so  $u_{n,1}, \dots, u_{n,r_n}$  baza za  $U_n$ , potem so  $u_{1,1}, \dots, u_{1,r_1}, \dots, u_{n,1}, \dots, u_{n,r_n}$  baza za  $U_1 + \dots + U_n$ .
- (4) Velja  $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$ .
- (5) Za vsak  $i = 1, \dots, n-1$  velja  $(U_1 + \dots + U_i) \cap U_{i+1} = \{0\}$ .



(1)  $\Rightarrow$  (2) Recimo da velja (1). Vzemimo take  $u_i \in U_i$ , da velja  $0 = u_1 + \dots + u_n$ . Ker velja tudi  $0 \in U_i$  za vse  $i$  in  $0 = 0 + \dots + 0$ , sledi po (1), da je  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ . Torej velja (2).

(2)  $\Rightarrow$  (1) Recimo, da velja (2). Vzemimo take  $u_i, v_i \in U_i$ , da velja  $u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n$ . Odtod sledi  $(u_1 - v_1) + \dots + (u_n - v_n) = 0$  in  $u_i - v_i \in U_i$  za vse  $i$ . Iz (2) sledi  $u_i - v_i = 0$  za vse  $i$ . Torej velja (1).

(2)  $\Rightarrow$  (3) Recimo, da velja (2) in da je za vsak  $i$   $u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}$  baza za  $U_i$ . Vsak vektor  $u \in U_1 + \dots + U_n$  lahko izrazimo kot  $u = u_1 + \dots + u_n$ , kjer  $u_i \in U_i$  za vse  $i$ . Vsak  $u_i$  lahko izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev  $u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}$ , ker so ti ogrodje za  $U_i$ . Torej lahko  $u$  izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev  $u_{1,1}, \dots, u_{1,r_1}, \dots, u_{n,1}, \dots, u_{n,r_n}$ . Torej so ti vektorji ogrodje za  $U_1 + \dots + U_n$ . Pokažimo še, da so linearno neodvisni. Recimo, da velja  $\alpha_{1,1}u_{1,1} + \dots + \alpha_{1,r_1}u_{1,r_1} + \dots + \alpha_{n,1}u_{n,1} + \dots + \alpha_{n,r_n}u_{n,r_n} = 0$ . Za vsak  $i$  označimo  $u_i := \alpha_{i,1}u_{i,1} + \dots + \alpha_{i,r_i}u_{i,r_i}$ . Očitno  $u_i \in U_i$  za vsak  $i$  in  $u_1 + \dots + u_n = 0$ . Po točki (2) odtod sledi, da je  $u_i = 0$  za vse  $i$ . Ker so  $u_{i,1}, \dots, u_{i,r_i}$  linearno neodvisni, res velja  $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,r_i} = 0$  za vse  $i$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Upoštevamo, da je razsežnost enaka moči baze.

(4)  $\Rightarrow$  (5) Če  $n$ -krat uporabimo posledico dimenzijske formule, dobimo

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + \dots + U_n) &\leq \dim(U_1 + \dots + U_{n-1}) + \dim U_n \leq \\ &\leq (\dim(U_1 + \dots + U_{n-2}) + \dim U_{n-1}) + \dim U_n \leq \dots \\ &\dots \leq \dim U_1 + \dots + \dim U_n\end{aligned}$$

Če velja (4), potem se začetek in konec ujemata, torej imamo povsod enačaj. Odtod sledi, da za vsak  $i = 1, \dots, n-1$  velja

$$\dim(U_1 + \dots + U_i + U_{i+1}) = \dim(U_1 + \dots + U_i) + \dim U_{i+1}$$

Če za vsak  $i$  uporabimo posledico dimenzijske formule, dobimo (5).

(5)  $\Rightarrow$  (2) Recimo, da velja (5). Vzemimo take vektorje  $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ , da velja  $u_1 + \dots + u_n = 0$ . Odtod sledi, da vektor  $u_1 + \dots + u_{n-1} = -u_n$  pripada podprostoru  $(U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n$ , ki je po predpostavki enak  $\{0\}$ . Torej je  $u_1 + \dots + u_{n-1} = 0$  in  $u_n = 0$ . Odtod sledi, da vektor  $u_1 + \dots + u_{n-2} = -u_{n-1}$  pripada podprostoru  $(U_1 + \dots + U_{n-2}) \cap U_{n-1}$ , ki je po predpostavki enak  $\{0\}$ . Torej je  $u_1 + \dots + u_{n-2} = 0$  in  $u_{n-1} = 0$ . Po nekaj korakih dobimo, da so vsi  $u_i$  enaki nič. torej velja (2).



## Prehod na novo bazo

Naj bo  $V$   $n$ -razsežen vektorski prostor in naj bosta  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  ter  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$  dve bazi za  $V$ . ( $\mathcal{B}$  je stara baza,  $\mathcal{C}$  pa nova baza.)

Vsak vektor  $v \in V$  lahko enolično razvijemo tako po bazi  $\mathcal{B}$  kot po bazi  $\mathcal{C}$ :

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \quad (1)$$

$$v = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n \quad (2)$$

V tem primeru pišemo

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [v]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Konstruirali bomo tako matriko  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ , da bo za vsak  $v \in V$  veljalo

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} \quad (4)$$

Taki matriki bomo rekli **prehodna matrika** iz baze  $\mathcal{B}$  na bazo  $\mathcal{C}$ .

Vsak element baze  $\mathcal{B}$  lahko razvijemo po bazi  $\mathcal{C}$ . Dobimo

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{1,1}w_1 + \dots + \alpha_{1,n}w_n \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha_{n,1}w_1 + \dots + \alpha_{n,n}w_n \end{aligned} \tag{5}$$

Skalarje  $\alpha_{i,j}$  potem zložimo v matriko

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Pozor, skalarje iz  $i$ -tega razvoja smo zložili v  $i$ -ti stolpec (in ne v  $i$ -to vrstico kot bi pričakovali). Na kratko definicijo  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  zapišemo kot

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Dokažimo sedaj formulo (4). Če formule (5) vstavimo v formulo (1) in uredimo, dobimo razvoj

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \\ &= \beta_1 (\alpha_{1,1} w_1 + \dots + \alpha_{1,n} w_n) + \dots + \beta_n (\alpha_{n,1} w_1 + \dots + \alpha_{n,n} w_n) \\ &= (\beta_1 \alpha_{1,1} + \dots + \beta_n \alpha_{n,1}) w_1 + \dots + (\beta_1 \alpha_{1,n} + \dots + \beta_n \alpha_{n,n}) w_n \end{aligned} \quad (8)$$

Če primerjamo koeficiente v razvojih (2) in (8), dobimo

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_1 \alpha_{1,1} + \dots + \beta_n \alpha_{n,1} \\ &\vdots \\ \gamma_n &= \beta_1 \alpha_{1,n} + \dots + \beta_n \alpha_{n,n} \end{aligned} \quad (9)$$

V matričnem zapisu se (9) glasi

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

Če v formuli (10) upoštevamo definiciji (3) in (6) dobimo formulo (4).

# Primeri prehodnih matrik

Vzemimo dve bazi v  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Izračunajmo prehodni matriki  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  in  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ . Ker je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

velja  $P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Izračun  $P_{B \leftarrow C}$  je preprostejši. Iz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sledi, da je  $P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Opazimo, da je produkt obeh prehodnih matrik identična matrika. To velja tudi v splošnem.

# Lastnosti prehodnih matrik

Doslej smo dokazali naslednjo lastnost prehodnih matrik.

## Izrek 1 (Osnovna formula za prehodne matrike)

Naj bosta  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{C}$  dve bazi končno-razsežnega vektorskega prostora  $V$ . Potem za vsak vektor  $v \in V$  velja  $[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$

Oglejmo si nekaj posledic izreka 1.

## Izrek 2 (Produkt prehodnih matrik)

Naj bodo  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{D}$  tri baze končno-razsežnega vektorskega prostora  $V$ . Potem velja  $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Upoštevajmo formulo (7) in Izrek 1.

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} &= P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}}[u_1]_{\mathcal{C}} & \dots & P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}}[u_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{D}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} \\ &= P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} \end{aligned}$$



### Izrek 3 (Inverz prehodne matrike)

Naj bosta  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{C}$  dve bazi končno-razsežnega vektorskega prostora.

Potem velja  $(P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$

Dokaz: Če uporabimo Izrek 2 z  $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ , dobimo  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ . Po definiciji prehodne matrike je  $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$  identična matrika. Odtod sledi, da je  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  obrnljiva matrika in da velja

$$(P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

### Posledica

Naj bosta  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  in  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$  bazi vektorskega prostora  $F^n$ . Potem velja  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$ .

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{S}$  standardna baza  $F^n$ . Potem je  $[v]_{\mathcal{S}} = v$  za vsak  $v \in F^n$ .

Iz formule (7) sledi  $P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [u_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [u_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$ .

Podobno dokažemo  $P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}$ . Po izrekih 2 in 3 je

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$