

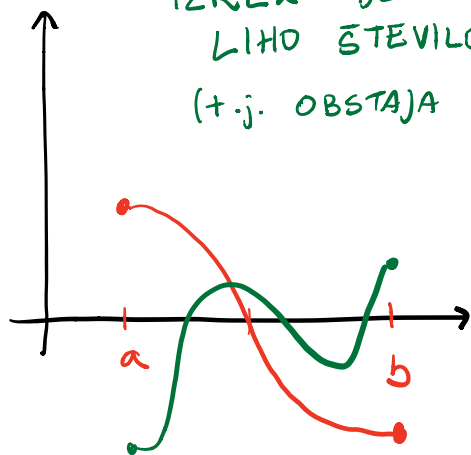
IZREK:

NAJ BO $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ZVEZNA FUNKCIJA.

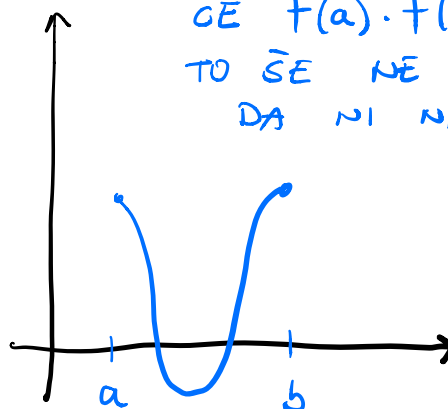
ČE VELJA $f(a) \cdot f(b) < 0$, OBSTAJA $c \in (a, b)$,

DA JE $f(c) = 0$.

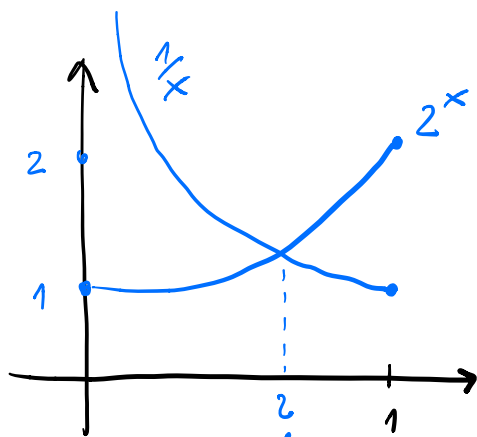
IZREK DETEKTIRA
LIHO ŠTEVILO NIČEL
(+j. OBSTAJA VSAJ ENA)



ČE $f(a) \cdot f(b) > 0$
TO ŠE NE POMEŃI,
DA NI NIČEL.



NALOGA: POKAŽI, DA MA ENAČBA $x \cdot 2^x = 1$
REŠITEV NA INTERVALU $[0, 1]$. DOLOČI JO
NA ENO DECIMALKO NATANČNO.



$$x \cdot 2^x = 1$$

$$2^x = \frac{1}{x}$$

OBSTOJ NIČLE SLEDI IZ IZREKA, ČE NPR. VZAMEMO

$$f(x) = x \cdot 2^x - 1, a=0, b=1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} f(0) \cdot f(1) < 0.$$

KAKO DOLOŽITI Približno vrednost ničle?

Z RAZPOLAVLJANJEM INTERVALA OZ. METODO BISEKCIJE:

PONAVLJAJ:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{če } f(a) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow b = c$$

$$\text{če } f(b) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow a = c$$

sicer je ničla v a, b, c .

OPOMBA: METODA 'DOBRO DELUJE' LE, ČE IMAMO NA INTERVALU LIHO ŠTEVILO NIČEL. NAŽLI BOMO ENO IZNED NJIH, ODVISNO OD RAZPOREDITVE.

NAŠ PRIMER:

$$\sim a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = -1, f(1) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - 1 < 0$$

SKLEP: NIČLA JE NA INTERVALU $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\sim a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{3}{2^{\frac{5}{4}}} - 1 \approx 0,26$$

SKLEP: NIČLA JE NA INTERVALU $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

SEDAJ ŽE VEMO, DA JE Približna vrednost 0.5, 0.6 ALI 0.7. ZATO PREVERIMO KAR 0.6

$$\sim c = 0.6$$

$$f(0.6) \approx -0.1 < 0$$

NIČLA JE MED
0.6 in 0.75

$$\sim c = 0.65$$

$$f(0.65) \approx 0.02 > 0$$

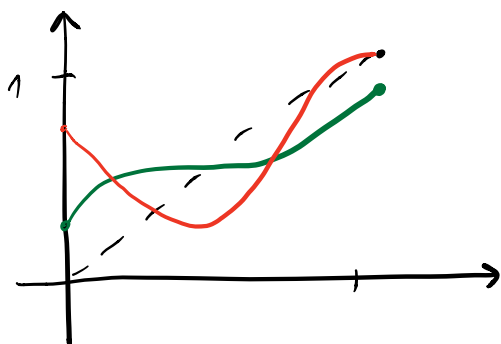
NIČLA JE MED
0.6 in 0.65

SKLEP: ZAOKROŽIMO JO NA 0.6

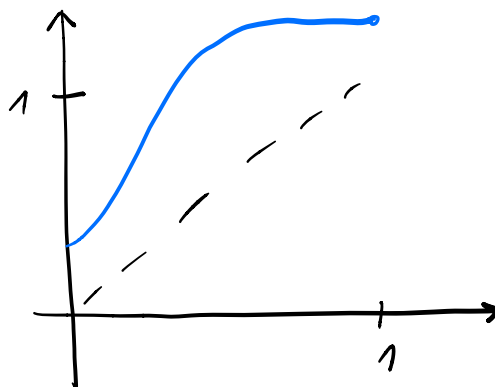
NALOGA:

DOKAŽI, DA IMA VSAKA ZVEZNA FUNKCIJA, KI
INTERVAL $[0, 1]$ SLIKA VASE, NEGIBNO TOČKO.

t.j. $\exists x \in [0, 1]: F(x) = x$.



OPOMBA: LAHKO JE VEČ
NEGIBNIH TOČK.



OPOMBA: ČE $f([0, 1])$ NI POD
 $[0, 1]$ TO NI NUJNO RES.

IDEJA: PREDBLIKOVATI f TAKO, DA IŠČIMO NIČLO.

$$f(x) = x$$

$$g(x) := f(x) - x = 0$$

DOKAŽIMO, DA STA KRAJISČI NASPROTNO PREDZNAČENI:

$$g(0) = f(0) \in [0, 1]$$

$$g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$$

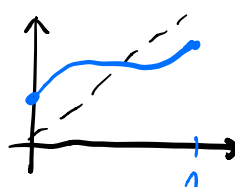
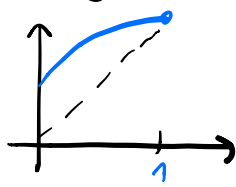
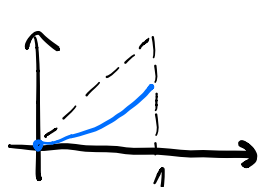
KER f SLIKA
V $[0, 1]$

MOŽNOSTI:

$$\sim g(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad \text{NEGIBNA}$$

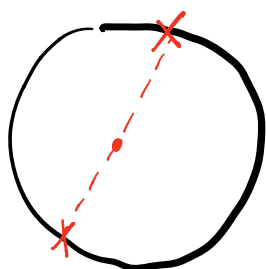
$$\sim g(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 1 \quad \text{NEGIBNA}$$

$$\sim g(0) > 0 \text{ IN } g(1) < 0 \Rightarrow \text{OBSTAJA NEGIBNA NA } (0, 1).$$

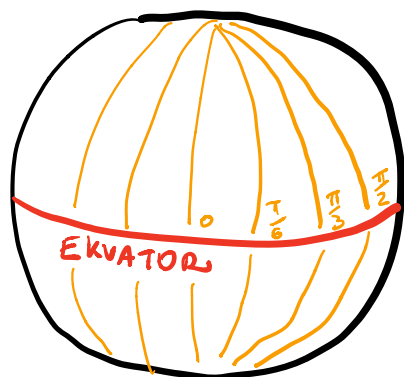


NALOGA:

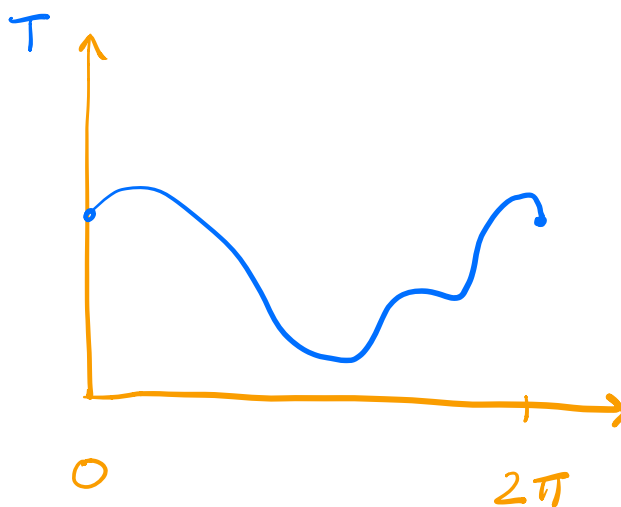
DOKAŽI, DA NA EKVATORJU V VSAKEM TREUTKU
OBSTAJATA ANTIPODNI TOČKI Z ISTO TEMPERATURO.



ANTIPODNI PONEHI, DA DALJICA, KI
JU POVEŽUJE, POTEKA SKOZI
SREDIŠČE ZEMLJE.



OZNAČIMO TOČKE NA
EKVATORJU S KOTI
 $\varphi \in [0, 2\pi)$



GRAF TEMPERATURE $T(\varphi)$

KLJUČNI PREDPOSTAVKI OZ. LASTNOSTI:

$$\{ T(\varphi) \text{ JE ZVEZNA IN } T(0) = T(2\pi) \}$$

KAJ ŽELIMO DOKAZATI:

$$\exists \varphi \in [0, \pi]: T(\varphi) = T(\varphi + \pi)$$

$$F(\varphi) := T(\varphi) - T(\varphi + \pi) = 0$$

UPORABIMO IZREK:

$$F(0) = T(0) - T(\pi)$$

$$F(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0)$$

↑
PERIODIČNOST

DVE MOŽNOSTI:

(i) $F(0) = F(\pi) = 0$ t.j. $T(0) = T(\pi)$
ISKANI PAR TOČEK JE $\varphi = 0$ IN $\varphi = \pi$.

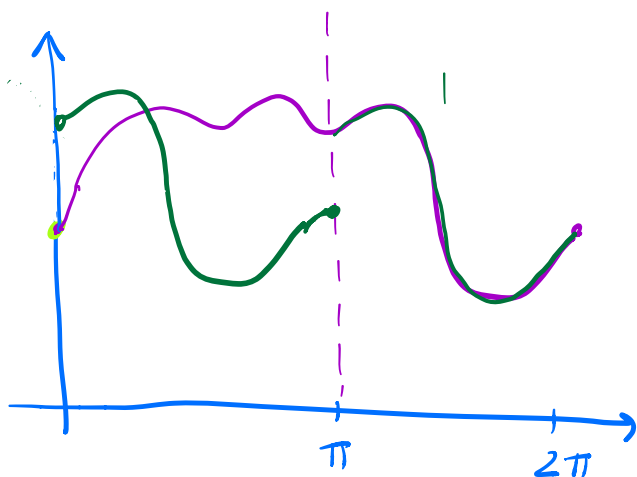
(ii) $F(0) \neq 0$ IN $F(\pi) \neq 0$

$$F(0) = T(0) - T(\pi) = -F(\pi)$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \in (0, \pi) : F(\varphi) = 0$$

ISKANI PAR JE φ IN $\varphi + \pi$.

GRAFIČNI DOKAZ:



PREMAKNEMO DESNI
DEL GRAFA ZA π
V LEVO IN GLEDAMO,
ALI OBSTAJA PRESEČIŠČE.

LE TO SE POJAVI VEDNO,
SAJ BODISI VELJA:

$$\sim T(0) = T(\pi) = T(2\pi)$$

$$\sim T(\pi) \neq T(0)$$

t.j. KRIVULI SE KRIŽATA.

ODVOD

NALOGA ZA PONOVITEV:

PONUDI TABELO OSNOVNIH ODVODOV IN PRAVILA
ZA ODVAJANJE, TER IZRAČUNAJ ODVODE NASLEDNJIH
FUNKCIJ:

(a) $f(x) = e^{-\cos x}$

(b) $f(x) = x^n \cdot \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $f(x) = \frac{2^{3x}}{3^{x^2}}$

(d) $f(x) = \frac{1 - \ln^2 x}{\ln 3 + \ln^3 x}$

(e) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

* (f) $f(x) = x^x$

* (g) $f(x) = (\sin x)^{+g^x}$

(a) $f'(x) = e^{-\cos x} \cdot \sin x$

UPORABILI SMO: $(e^x)' = e^x$, $(\cos x)' = -\sin x$
 $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(b)

$$f'(x) = n \cdot x^n \cdot \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) + x^n \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

NA NOVO SMO
UPORABILI:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

(c)

$$f'(x) = \frac{2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot 3^{x^2} - 2^{3x} \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x}{(3^{x^2})^2}$$

NA NOVO SMO
UPORABILI:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

(d)

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x \cdot \frac{1}{x} (\ln 3 + \ln^3 x) - (1 - \ln^2 x) 3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln 3 + \ln^3 x)^2}$$

NA NOVO:

$$(\ln^m x)' = m \cdot \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x}$$

(e)

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

(f)

$$f(x) = x^x = \underbrace{e^{\ln x^x}}_{\text{KLJUČEN TRIK}} = e^{x \cdot \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

$$(g) f(x) = (\sin x)^{\tan x} = e^{\tan x \cdot \ln(\sin x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\tan x \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \ln(\sin x) + \tan x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) \\ &= (\sin x)^{\tan x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\sin x) + 1 \right) \end{aligned}$$