

Funkcije - nadzpyvanje (3)

Gaussovi smo o polinomih. Dokazali smo izreč,
k. pravi: Polinom stupnje n s realnim koeficienti
ima najviše n realnih ničel.
Če dopustimo i realne i kompleksne ničle, se situacija zelo
spremenila: Imamo

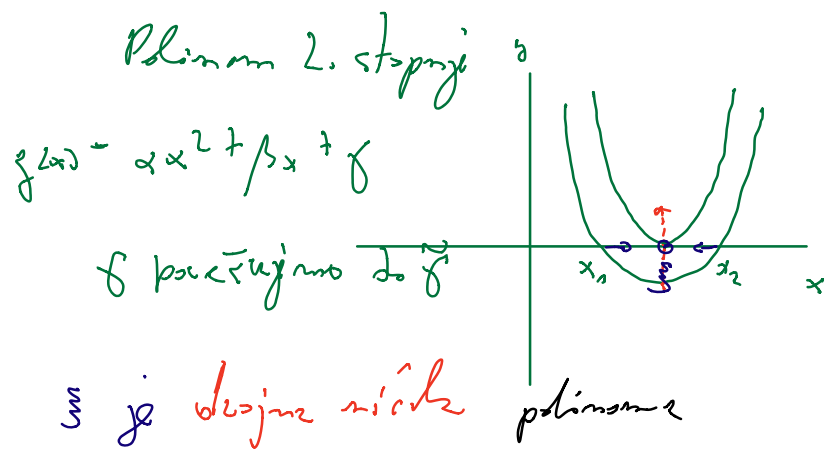
Izreč (Dandova izreč algebre) Naj bo $P(x)$ polinom
stupnje n s kompleksnimi koeficienti. Tedy ima
ta polinom natanko n kompleksnih ničel, če te
ničle štajmo algebrizirano. (Gauss)

Opomba: Ničle štajmo algebrizirano, če pri štetju
upoštevamo njihove stopnje.

Primer: $f(x) = (x - x_0)^3 (x - x_1)^2$.

Geometrijsko gledno ima $f(x)$ le dve ničli. Algebrizsko

glede na po jih ima $5 = 3 + 2$
 stopnja ničle x_0 stopnja ničle x_1



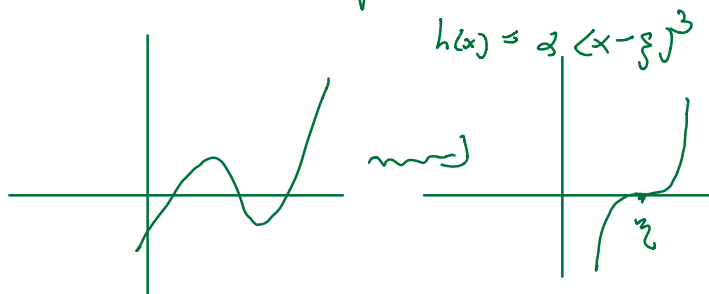
$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \tilde{\gamma}.$$

Midimo si lahko: Različni ničli x_1 in x_2 sta se združili v eno ničlo, ki pa je stopnje 2.

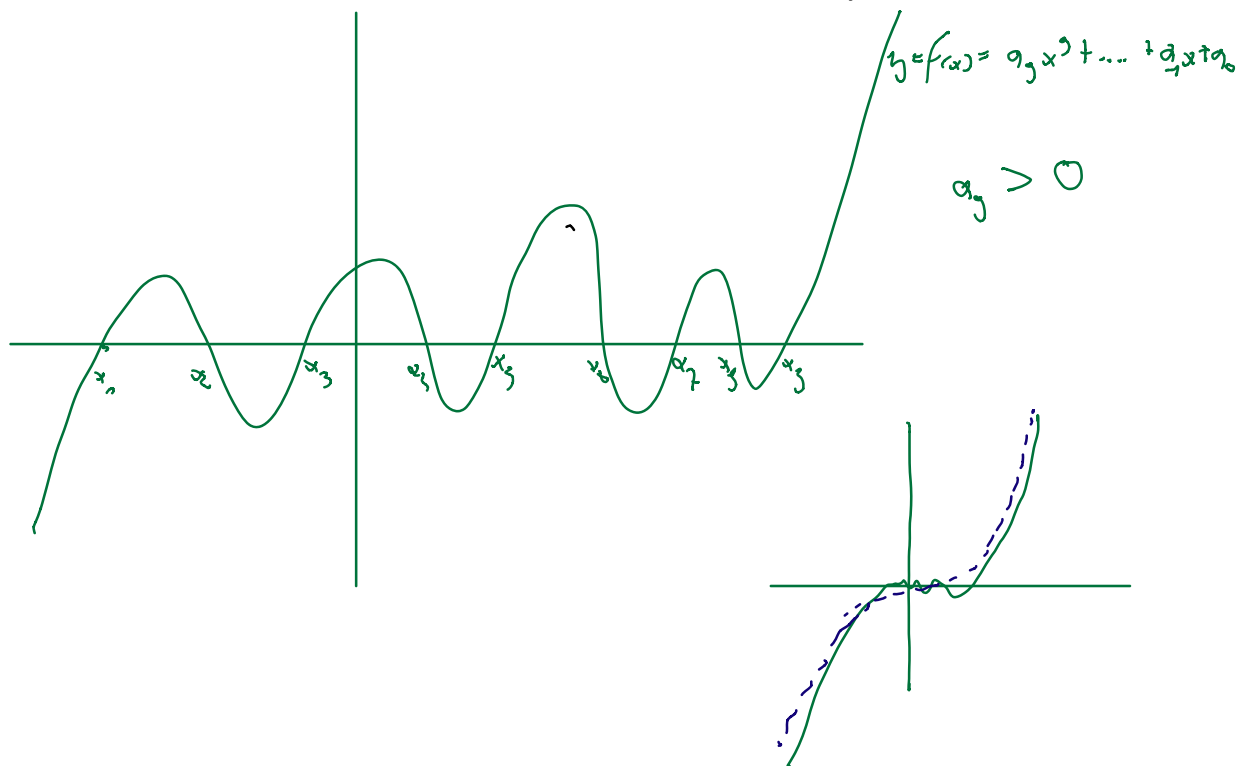
Res:

$$g(x) = \alpha (x - \xi)^2.$$

V eni dvojni ničli se skrivata dve enojni ničli
 V eni ničli st. k se skrivata k enojnih ničel.



Grafi polinoma stopnje n : Če je $f(x)$ st n
in ima n realnih ničel, je njegov graf oblika



$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n} \right)$$

Če $x \gg 1$ je približno enako 1

$$\approx a_n x^n$$

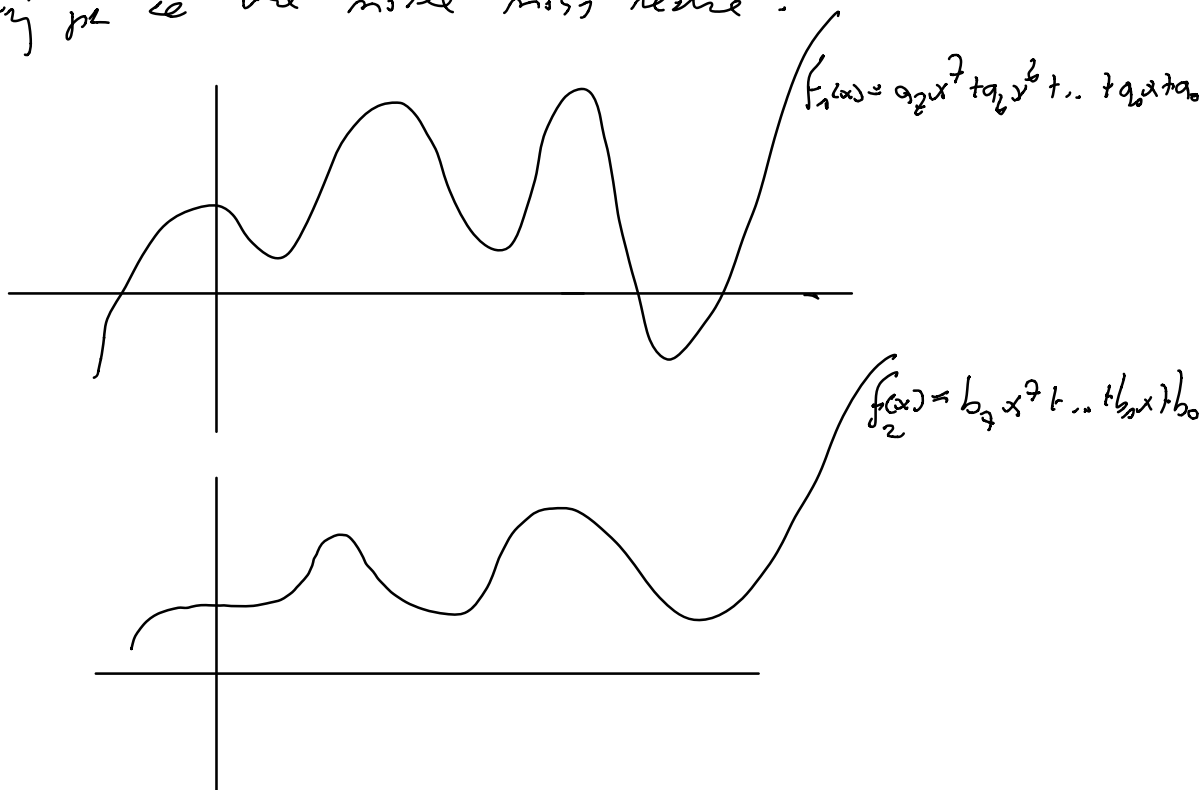
Postane velika tudi če $x \ll -1$ $|x| \gg 1$

$$f(x) \approx a_9 x^9$$

Splāšano:

$$\underline{f(x) \approx a_n x^n \quad |x| \gg 1}$$

Kij pe ē lē nīle nīš, redhe:



Izvērtēsim nīel polinoma stūpij 2

Izvērtēsim kvadrātisko funkciju

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Prepostavimo naspėj, da kv funkcija ima tie reāni rīši α un β . Tādējāpziems, funkcija

$$g(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

ja tādā kvadrātiskā funkcija. Ima tie rādānāi koeficienti un ir tie rādānāi kvā funkcija $f(x)$.

Vsā kvadrātiskā funkcija ja rakstānā dācānā s
trēmā pārmānā - nāpā s trēmā koeficientā
- a, b, c v mādān pārmānā. Rādānāi bānā, da bānā
da koeficientā mādānācānā s dānā rādānā
(en koeficient ir dā rādānā tādā trānā trānācā
pārmānā). Sklēpānā bānā: Dā kvadrātiskā funkcijā
q raknānā rādānānā koeficientānā in q raknānā
pārmānā rādānā **stā raknānā**.

Dālēnā si $g(x)$

$$\begin{aligned}
 \underline{g(x)} &= a(x-\alpha)(x-\beta) = \\
 &= a(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta) = \\
 &= \underline{a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)}
 \end{aligned}$$

→ j' enlève :

$$\begin{aligned}
 \underline{f(x)} &= ax^2 + bx + c = \\
 &= \underline{a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})}
 \end{aligned}$$

$$f(x) \equiv g(x)$$

T2eq: $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

On remarque que enlever le terme x^2 de chaque côté, les coefficients sont égaux. On a :

$$-(\alpha+\beta) = \frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} *$$

Sistēm dūch enzīb
zē metnanlī α i β .

$$(\alpha + \beta)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Odējmo enzīho 4 · *, Dohimo:

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

Dfkejmo ei enzīhi

$$(\alpha + \beta)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b}{a} \\ \alpha - \beta &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} \end{aligned}$$

Linearen sistēm
dūch enzīb zē
metnanlī α , β .

$$2\alpha = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}} = \frac{1}{a} (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})$$

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Drugi reš:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Tako se izrazila ničli kvadratne funkcije s koeficienti te kvadratne funkcije. Očividno pišemo

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Torej opazimo naslednje:

b^2-4ac ni najno nemnegativno število.

Očitno namreč imamo:

$D = b^2 - 4ac > 0$, potem smo formel
 $x_{1,2}$ dve različni
realni ničli

$D = b^2 - 4ac = 0$, potem dobimo eno
dvojno realno ničlo

$D = b^2 - 4ac < 0$, potem niso funkcije
nima realnih ničel,

Opomba: funkcije ima v primeri $D < 0$ dve
konjugirani kompleksni ničli,

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Pomembno: Ničli sta konjugirani med seboj le, če
so koeficienti realni.

5.) Racionalne funkcije:

Racionalne funkcije so funkcije oblike

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kjer sta $P(x)$ in $Q(x)$ polinoma.

Pomemben pojav, ki ga srečamo pri racionalnih funkcijah so **poli**.

Polji najenostavnejših racionalnih funkcij.

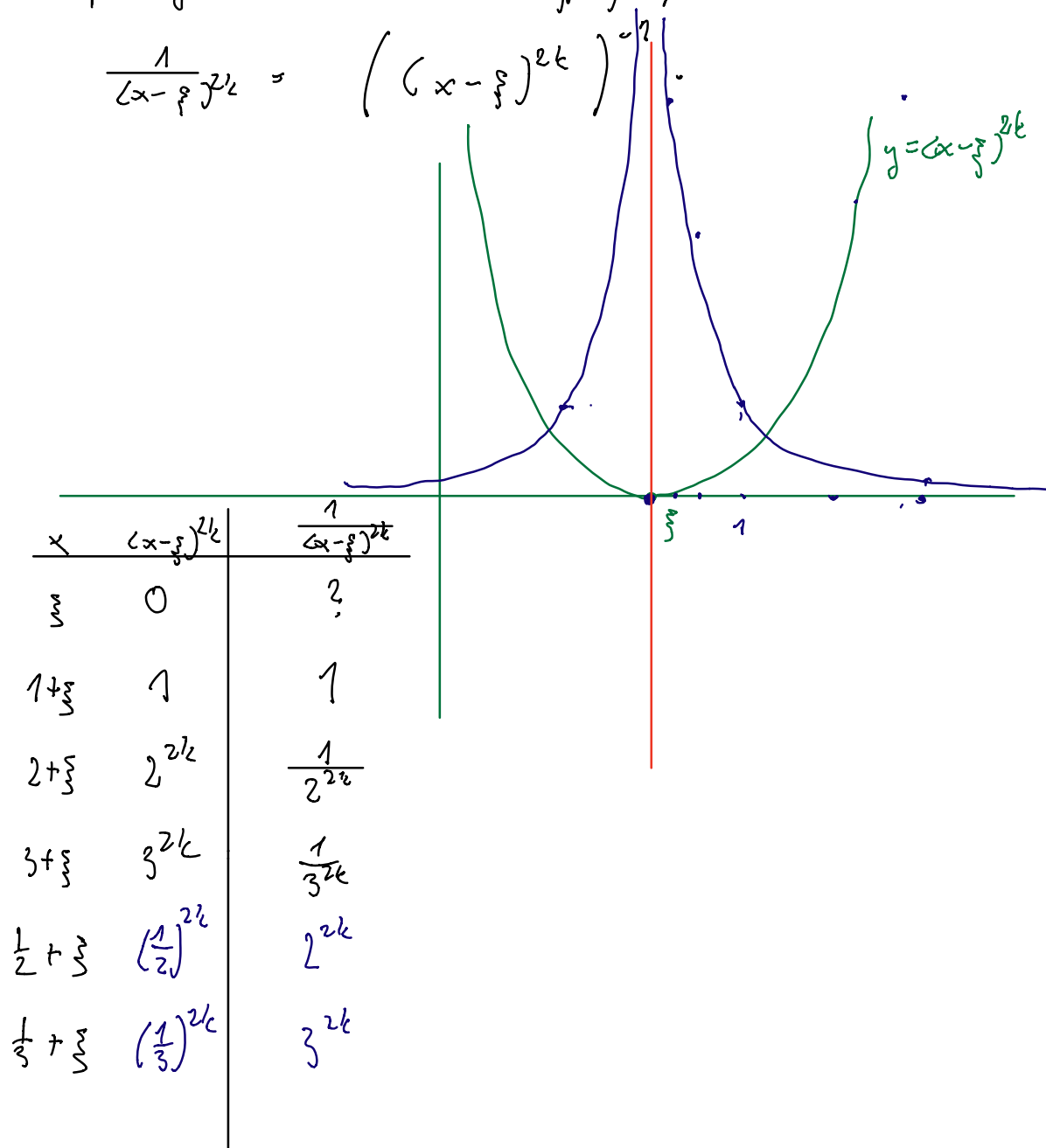
$$f(x) = \frac{1}{(x-\xi)^m} \quad m \in \mathbb{N}$$

Najbolj enostavni so tudi oblike.

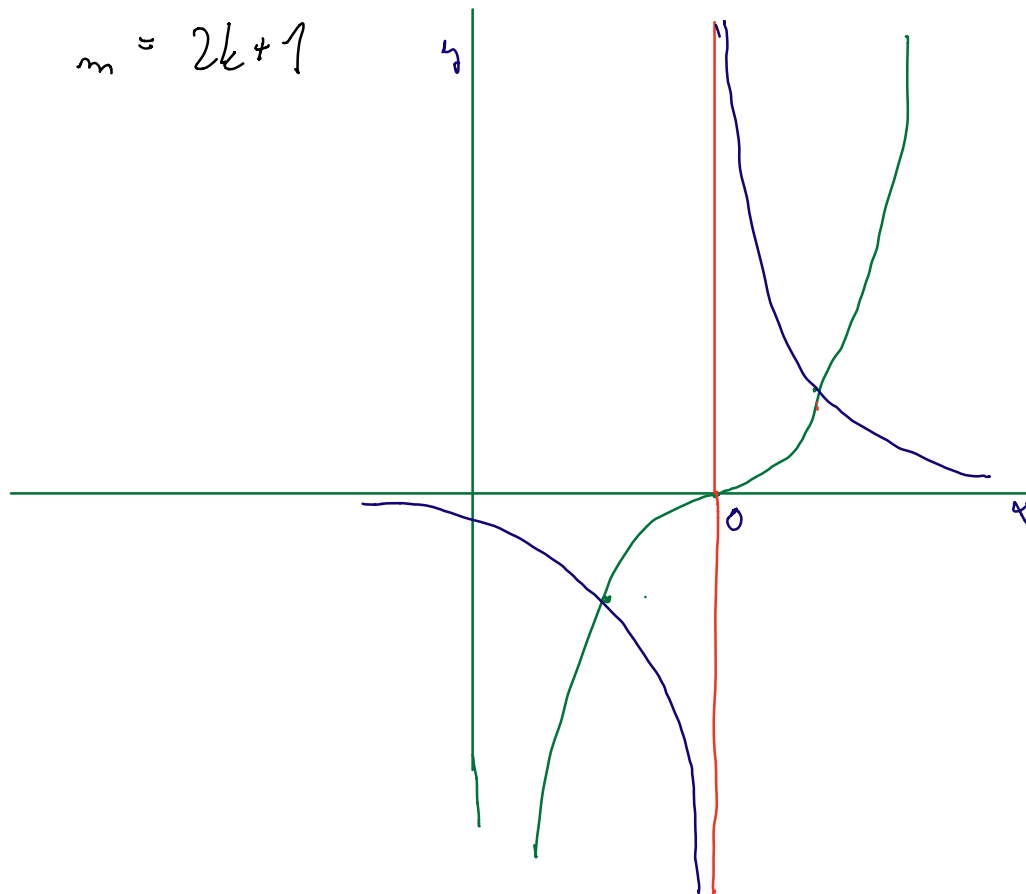
Kot izglede pač $f(x) = \frac{1}{(x-\xi)^{2k}}$

Operatīvās robežas: Atzīmēj operatīvās:

$$\frac{1}{(x-\xi)^{2k}} = \left((x-\xi)^{2k} \right)^{-1}$$



$$Niz\ h_m = 2k+1$$



Definicija: Funkcija $\frac{1}{(x-\xi)^{2k}}$ ima v $x=\xi$ pol
sode stopnje. Funkcija $\frac{1}{(x-\xi)^{2k+1}}$ ima v $x=\xi$ pol
lihe stopnje. Pri polu lihe stopnje funkcije
spremeni znak. (preizkus).

Nzi bo seohi funkcyi $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mzhedyni oblika:

$$p(x) = (x - \xi)^l \tilde{p}(x) \quad \tilde{p}(\xi) \neq 0$$

$$q(x) = (x - \xi)^k \tilde{q}(x) \quad \tilde{q}(\xi) \neq 0$$

Imamo taq:

$$f(x) = \frac{(x - \xi)^l}{(x - \xi)^k} \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$