

NALOGA:

(a) DOKAŽI, DA JE $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ INJEKTIVNA I SURJEKTIVNA FUNKCIJA.

(b) IZRAČUNAJ IN IZRAZI ODVODE FUNKCIJ $\cosh x$, $\sinh x$ I $\tanh x$.

(c) IZRAČUNAJ ODVODE $\operatorname{arccosh} x$, $\operatorname{arsinh} x$ I $\operatorname{artanh} x$.

$$(a) \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

DEJMO, DA JE $x, y \in \mathbb{R}$ I $\tanh x = \tanh y$:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) = (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})$$

$$e^{x-y} - e^{y-x} = -e^{x-y} + e^{y-x}$$

$$2e^{x-y} = 2e^{y-x}$$

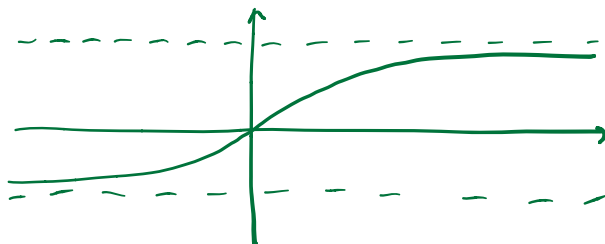
$$\Rightarrow x-y = y-x \Rightarrow x=y \quad \checkmark$$

OPAZIMO: $|\tanh x| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$

$$x \rightarrow \infty: \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow -\infty: \tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \rightarrow -1$$

NIČLA: $e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$



$$(b) \quad (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \operatorname{ch} x$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \end{aligned}$$

(c) SPOMNIMO:

$$\operatorname{ars} h x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ar} \operatorname{sh} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ar} \operatorname{ch} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

KAKO IZRAČUNATI ODVOD INVERZA OD $\tanh x$?

(a) IZRAČUNAMO $\operatorname{arctanh} x$ DIREKTNO, TER NATO ODVAJAMO. TO STORI SAM!

NAMIG: PREVERI, DA JE $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(b) UPORABIMO TRIK:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad /'$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

MI IMAMO: $f(x) = \tanh x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(f^{-1})(x) = \operatorname{arctanh} x$$

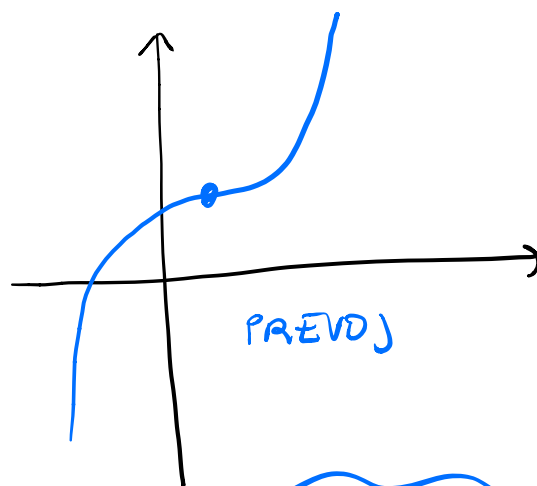
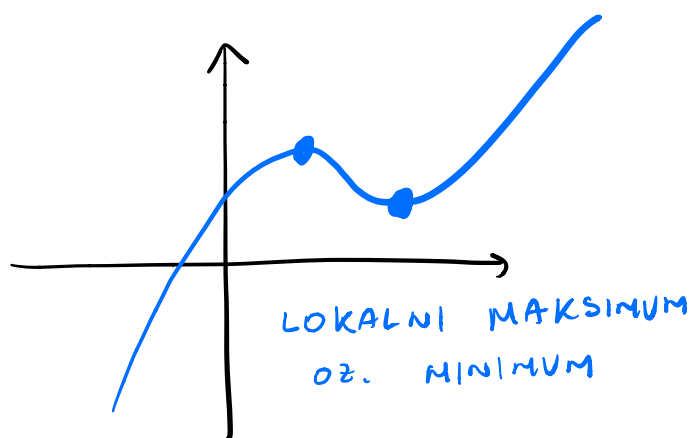
$$\therefore (\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2(\operatorname{arctanh} x)}} = \cosh^2(\operatorname{arctanh} x)$$

JE UPORABIMO $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$, DOBIMO:

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

LOKALNI IN GLOBALNI EKSTREMI

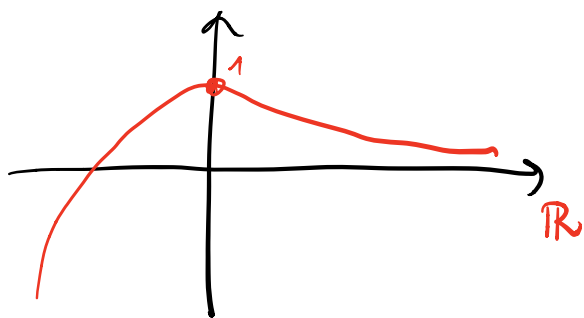
ODVOD JE ZELO POMEMBNO ORODJE PRI ANALIZI FUNKCIJ. Z NJIM NA PRIMER IŠČIMO T.I. STACIONARNE TOČKE, V KATERIH JE $f'(x)=0$. ZANJE JE ZNAČILNO, DA IMAJO VODORAVNO TANGENTO OZ. DA SE V NJIH FUNKCIJA 'USTAVI'.



DEF.:

ČE ZA $a \in D$ IN $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ VELJA, DA JE $f(a) \geq f(x)$ ZA VSE $x \in D$, PRAVIMO, DA JE V TOČKI a DOSEŽEN GLOBALNI MAKSlNUM f NA D , NAJVEČJA VREDNOST f NA D PA JE $f(a)$.

GLOBALNI MIN OZ. NAJMANJŠO VREDNOST DEFINIRAMO NA ENAK NAČIN. NPR.



GLOBALNI MAX DOSEŽENO V $x=0$ IN PRI $f(0)=1$, GLOBALNI MIN NA $\mathbb{R}$ NE OBSTAJA.

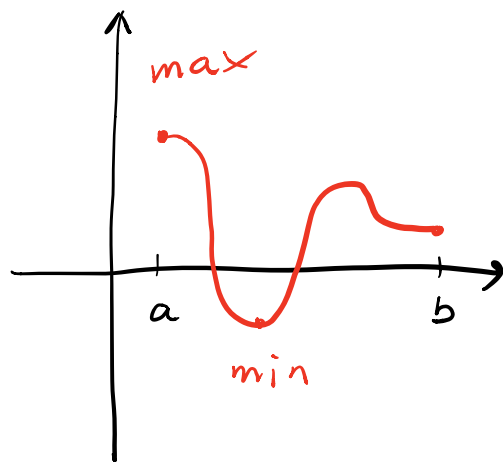
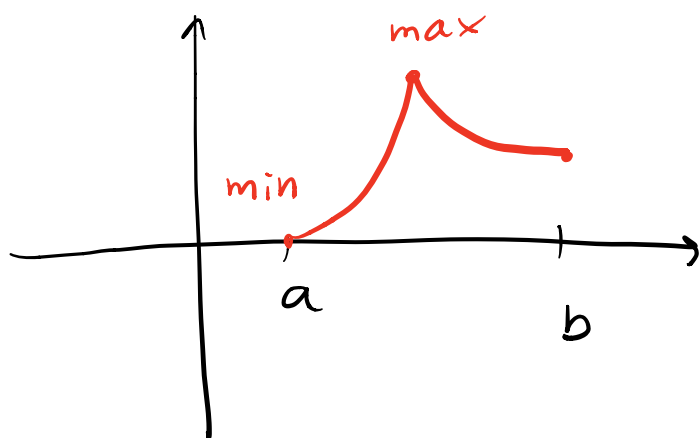
DEJSTVO:

ČE JE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ZVEZNA, OBSTAJATA OBA NJENA GLOBALNA EKSTREMA. ČE JE DODATNO BĚ ODVEDLJIVA RAZEN V KONĚNO TOČKAH, PA SO LE-TI DOSEŽENI V ENI IZMED TREH MOŽNOSTI:

(i) STACIONARNE TOČKE.

(ii) KRAJISČI.

(iii) TOČKE, KJER f NI ODVEDLJIVA.



NALOGA: POIŠČI GLOBALNE EKSTREME FUNKCIJE:

(a) $f(x) = x + \cos x$ NA $[0, \pi]$.

(b) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ NA $[0, 2]$.

(a) $f'(x) = 1 - \sin x = 0 \Rightarrow$ KANDIDATI SO:

(i) $x = \frac{\pi}{2}$ STAC. TOČKA.

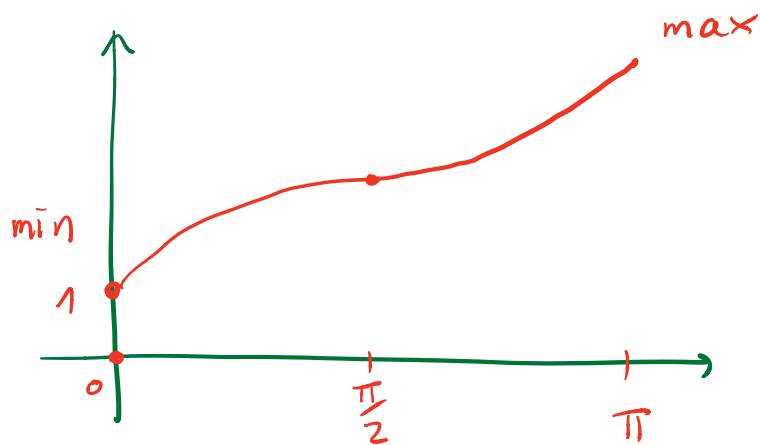
(ii) KRAJISČI $x=0$ IN $x=\pi$.

(iii) NEODVEDLJIVIH TOČEK NI.

$f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 1$, $f(\pi) = \pi - 1 > \frac{\pi}{2}$

SKLEP:

GLOBALNI min JE DOSEŽEN PRI $x=0$, max PA PRI $x=\pi$. NAJVEČJA VREDNOST f NA $[0, \pi]$ JE $\pi-1$, NAJMANJŠA PA 1.



(b)

$$f'(x) = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{\sqrt{\frac{1+2x^2+4x^4 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \cdot (1+x^2)^2} =$$

POZOR: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= 2 \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x| < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x| > 1 \\ \text{ne obstaja,} & |x| = 1 \end{cases}$$

KANDIDATI ZA GLOBALNA EKSTREMA:

(i) STAC. TOČK NI.

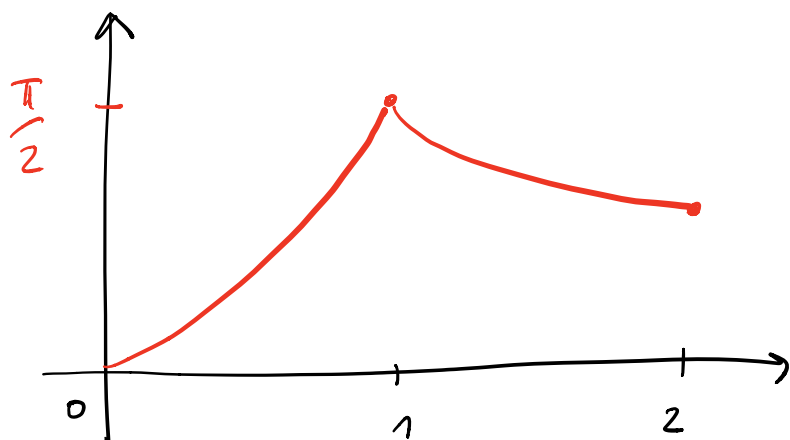
(ii) KRAJISČI $x=0$ IN $x=2$.

(iii) TOČKA, KJER f NI ODVEDLJIVA, $x=1$.

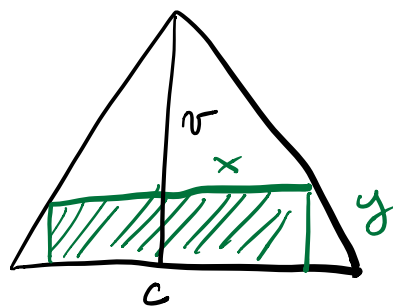
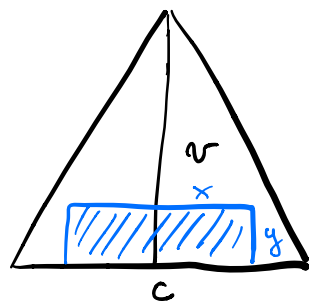
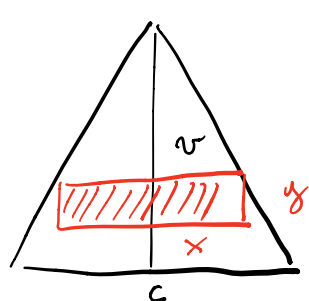
$$f(0)=0, \quad f(2)=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right), \quad f(1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

SKLEP:

f GLOBALNI MIN/MAX DOSEŽE PRI $x=0$ OZ. $x=\frac{\pi}{2}$,
NAJMANJŠA/NAJVEČJA VREDNOST f NA $[0,2]$ PA
JE 0 OZ. $\frac{\pi}{2}$.



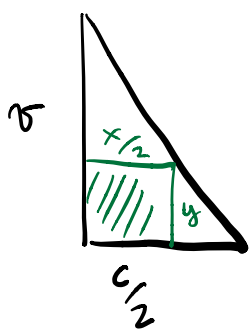
NALOHA: V ENAKOKRAK TRIKOTNIK Z OSNOVNICO c IN VIŠINO v VČRTAJ PRAVOKOTNIK, KI IMA ENO STRANICO VZPOREDNO OSNOVNICI. KOLIKŠNA JE NJEGOVA MAKSIMALNA PLOŠČINA?



OČITEN RAZHISLEK:

NAJVEČJO PLOŠČINO DOSEŽAMO, KO JE PRAVOKOTNIK
'NA OSNOVNICI IN SE DOTIKA STRANIC V OBEH
'ZGORNJIH OGLIŠCIH'. RES, VSAK DRUGAČEN
PRAVOKOTNIK LAHKO MALCE POVEČAMO.

ŠE VEDNO PA OSTAJA VPRAŠANJE, KAKŠNO
NAJ BO RAZMERJE MED STRANICO x IN y .
TU BOMO UPORABILI PODOBNOST IN ODUOD.
VELJA:



$$\frac{v}{c/2} = \frac{y}{c/2 - x/2}$$

$$c/2 \cdot y = v \cdot (c/2 - x/2)$$

$$y = \frac{v}{c} (c - x)$$

$$S = x \cdot y = \frac{v}{c} \cdot x (c - x)$$

IŠČEMO GLOBALNI MAKSIMUM TE FUNKCIJE
NA INTERVALU $[0, c]$

x JE NAJMANJ 0
IN NAJVEČ c .

OD TU DAJE JE PLOŠČA IDENTIČNA PREJŠNJI.

$$S' = \frac{v}{c} (c - x) + \frac{v}{c} x (-1) = \frac{v}{c} (c - 2x) = 0$$

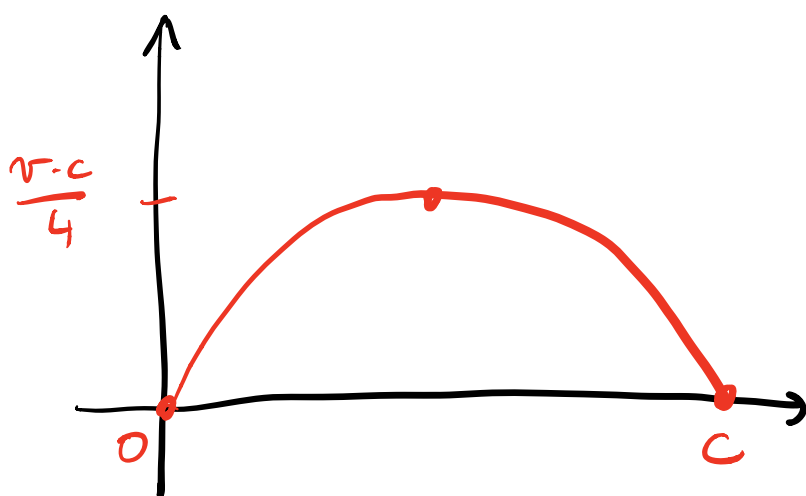
t.j. KANDIDATI ZA EKSTREM SO $x = \frac{c}{2}$, $x = 0$, $x = c$.

$$S(0) = S(c) = 0 \quad \text{GLOBALNI MINIMUM}$$

$$S\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\sqrt{c}}{c} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{c} \cdot c}{4} = \frac{S_{\Delta}}{2} \quad \text{max.}$$

SKLEP: NAJVEČJA MOŽNA PLOŠČINA JE DOSEŽENA,
KO JE $x = \frac{c}{2}$ IN $y = \frac{\sqrt{c}}{c} \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{c}}{2}$, ZNAČA
PA $\frac{\sqrt{c} \cdot c}{4}$ (POLOVICO PLOŠČINE TRIKOTNIKA).

SKICA FUNKCIJE S :



$$S = \frac{\sqrt{c}}{c} x (c-x)$$