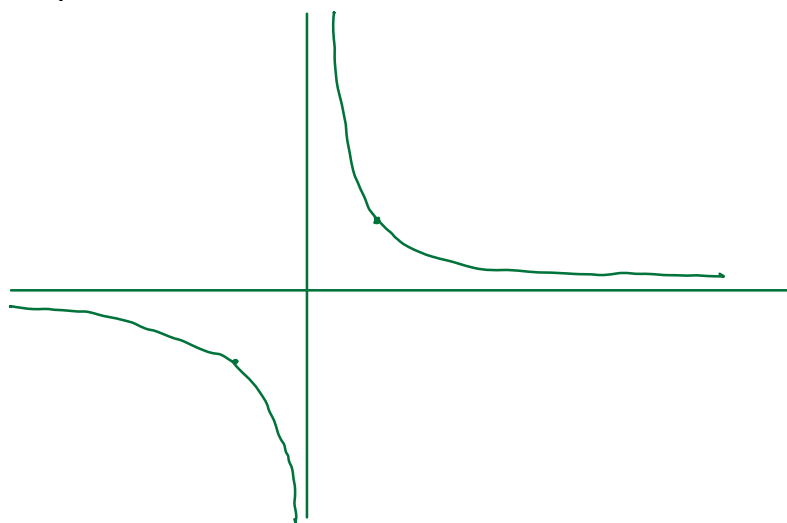


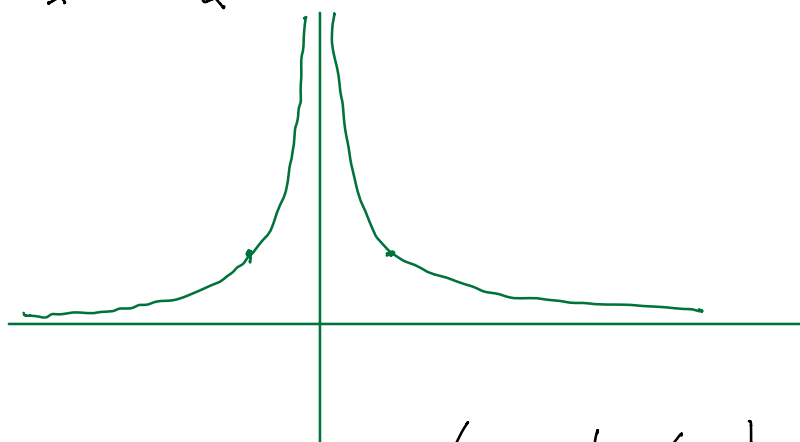
Funkcije - nadsferenja 4

Sposobnost se ponaša potencijal funkcij:

Primer: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$



$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$



Prejetojč sro nroli pzofo vsoh funkcij dloke
 $f(x) = (x - \xi)^{-k} \quad \xi \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

Ogledajmo si neki racionalne funkcije oblike

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$P(x) = (x - \alpha)^k \tilde{P}(x)$$

$$\tilde{P}(\alpha) \neq 0$$

$$Q(x) = (x - \alpha)^l \tilde{Q}(x)$$

$$\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - \alpha)^k}{(x - \alpha)^l} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \\ &= (x - \alpha)^{k-l} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \end{aligned}$$

Imamo tri možnosti:

$$1.) \quad k > l \quad \Rightarrow \quad k-l > 0$$

$$\text{Označimo: } k-l = j \quad j \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = (x - \alpha)^j \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

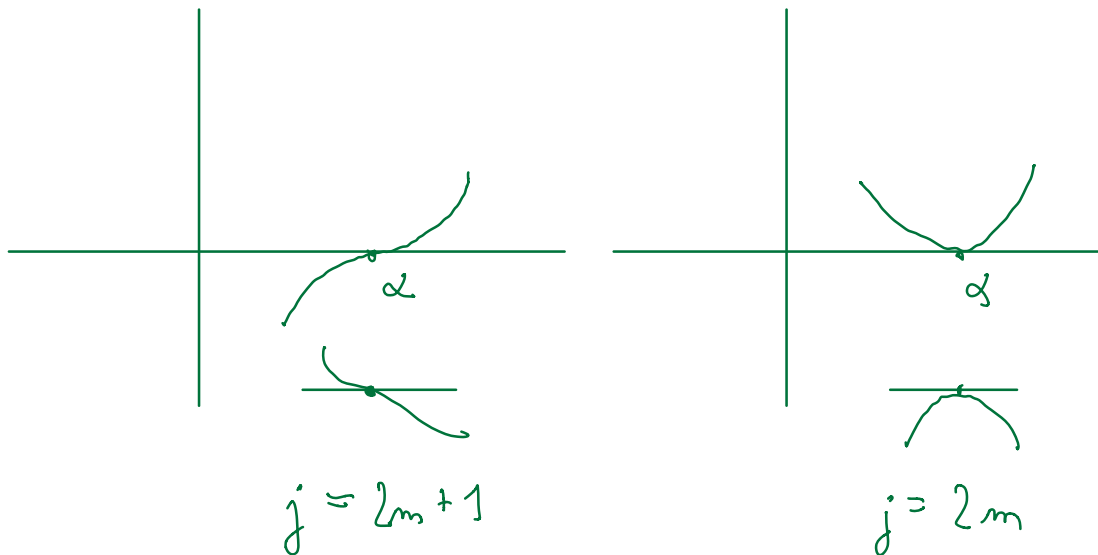
$$\text{Taj: } f(\alpha) = (\alpha - \alpha)^j \underbrace{\frac{\tilde{P}(\alpha)}{\tilde{Q}(\alpha)}}_c = (\alpha - \alpha)^j \cdot c = 0$$

Definicija: Racionalna funkcije

$$f(x) = (x - \alpha)^j \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

kyž je $\tilde{P}(\alpha) \neq 0$ in $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$ ima v točki $x = \alpha$ ničlo stopnje j .

Torej, v dani točki $x = \alpha$ ima graf funkcije $f(x)$ oblike:



$$2. \quad k - l = 0 \quad ; \quad k = l.$$

Tu imamo:

$$f(x) = \frac{(x - \alpha)^k}{(x - \alpha)^k} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

Vrednost $f(x)$ v $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = C \quad (\text{neko realno število } C \neq 0)$$

$$3.) \quad k - l < 0 \quad ; \quad k < l$$

Sedaj pa imamo:

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^k}{(x-\alpha)^l} \cdot \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)^m} \cdot \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

$m \in \mathbb{N}$.

Naj bo $|h| \ll 1$ C h je po abso. vrednosti zelo majhno število: Oglejmo si vrednost $f(x)$ v točkah, ki so zelo blizu α : Torej v točki $\alpha + h$

Imamo:

$$\begin{aligned} f(\alpha + h) &= \frac{1}{(\alpha + h - \alpha)^m} \cdot \frac{\tilde{p}(\alpha + h)}{\tilde{q}(\alpha + h)} \\ &= \left(\frac{1}{h}\right)^m \cdot \frac{\tilde{p}(\alpha + h)}{\tilde{q}(\alpha + h)} = \\ &= \left(\frac{1}{h}\right)^m \cdot \frac{\tilde{p}(\alpha + h)}{\tilde{q}(\alpha + h)} \end{aligned}$$

Funkcijs $f(x+h)$ imamo $h \ll 1$ in funkcijo

$$g(h) = f(x+h) = \left(\frac{1}{h}\right)^m \frac{\tilde{P}(x+h)}{\tilde{Q}(x+h)}$$

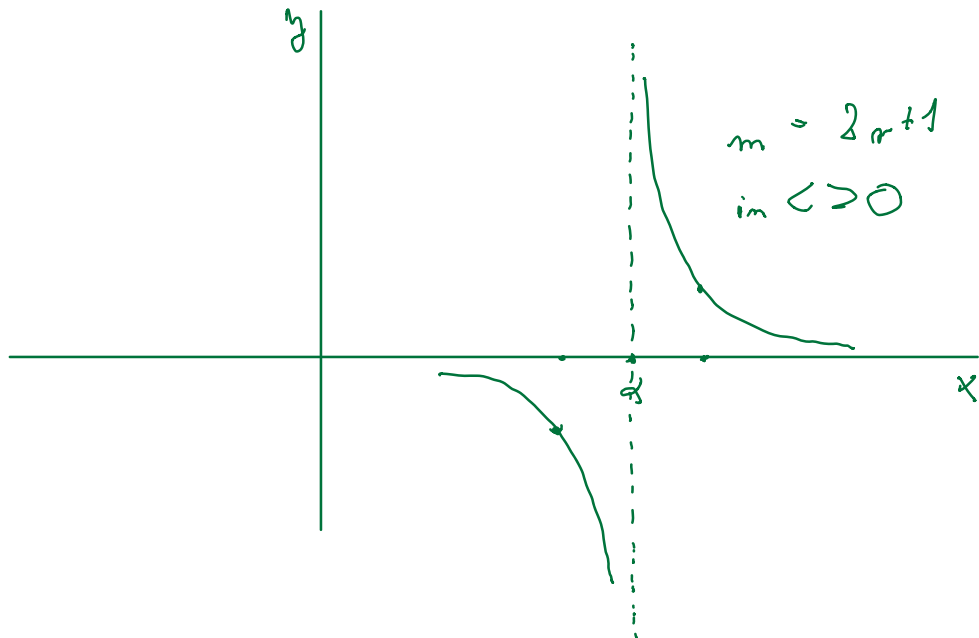
$$\tilde{P}(x+h) \approx \tilde{P}(x) ; \quad \tilde{Q}(x+h) \approx \tilde{Q}(x),$$

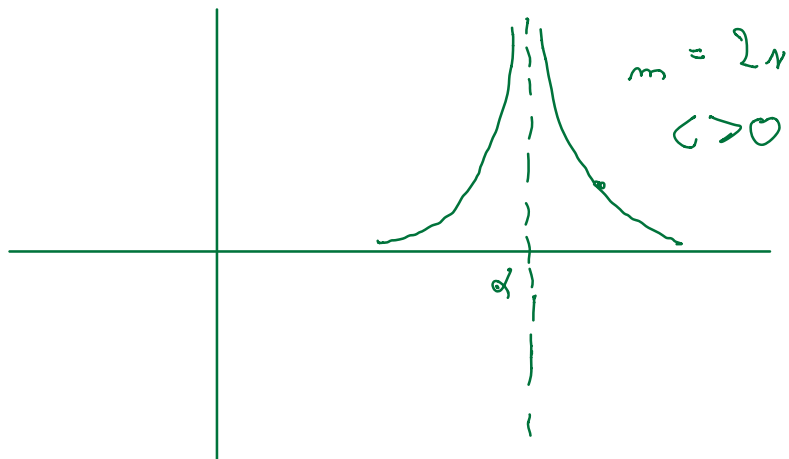
ker sta $\tilde{P}$ in $\tilde{Q}$ polinoma. Torej:

$$\frac{\tilde{P}(x+h)}{\tilde{Q}(x+h)} \approx C \quad \text{za } |h| \ll 1.$$

Zato lahko napišemo:

$$f(x+h) = g(h) \approx \left(\frac{1}{h}\right)^m \cdot C = \frac{1}{h^m} C.$$





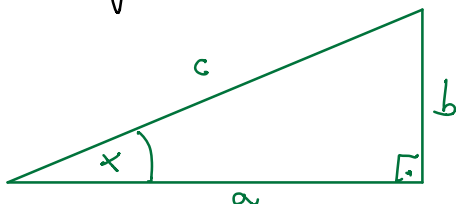
Definicija Če je $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ref:

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^m} \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

in $\tilde{p}(\alpha) \neq 0$, $\tilde{q}(\alpha) \neq 0$, potem imamo racionalno funkcijo $f(x)$ v točki $x = \alpha$ po stopnji m .

Kotne funkcije

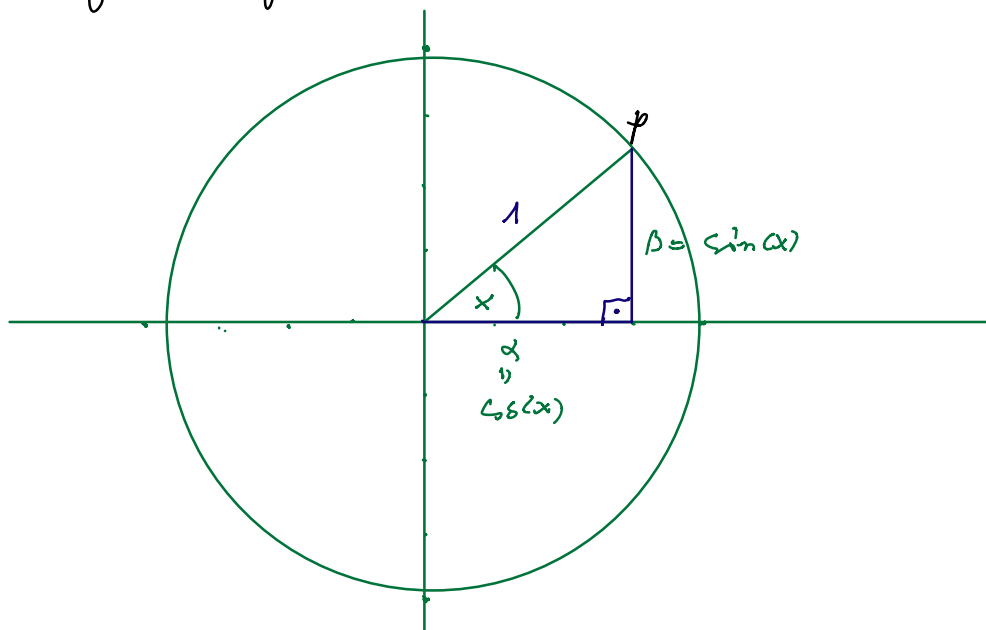
Kotne funkcije se imenujejo tudi trigonometrične funkcije,
 kot manjša običajne količine, povezane s trikotniki.



Stare - osnovna definicije $\cos(x)$, $\sin(x)$ y:

$$\cos(x) = \frac{a}{c}, \quad \sin(x) = \frac{b}{c}$$

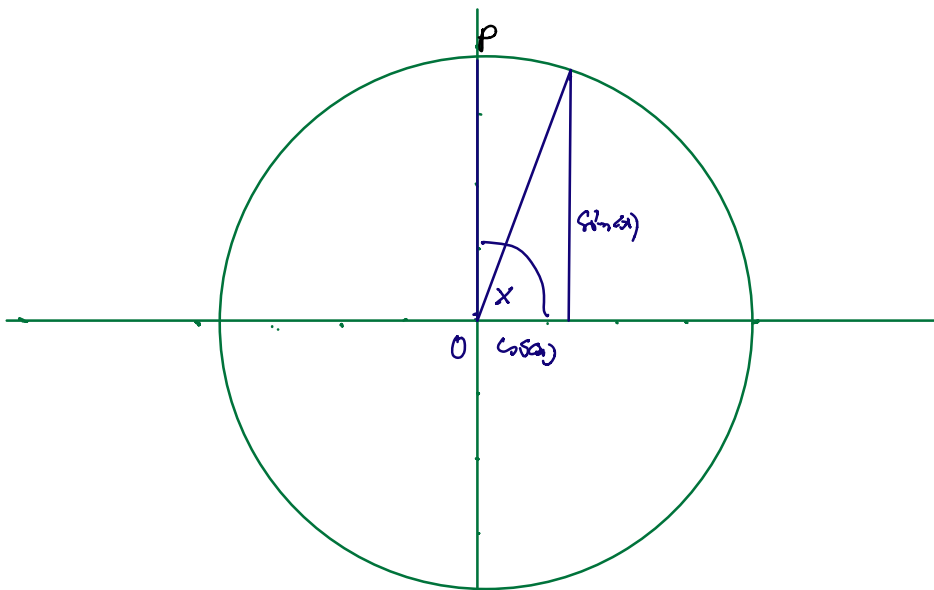
To definicija razširimo na kote $x > \frac{\pi}{2}$ s pomočjo enotske kroga.



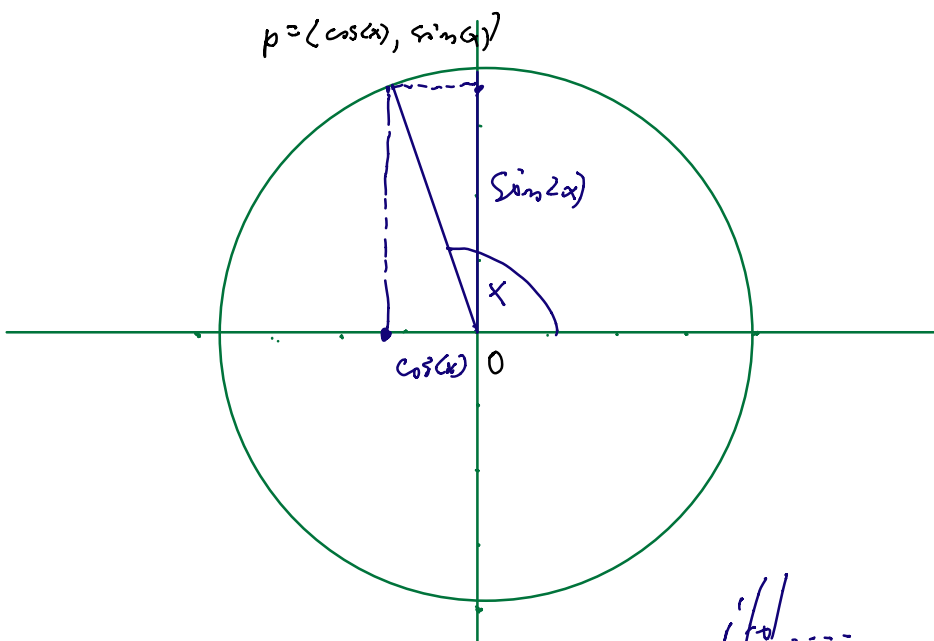
Dolžine;

$$\cos(x) = \frac{a}{1} = a$$

$$\sin(x) = \frac{b}{1} = b$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



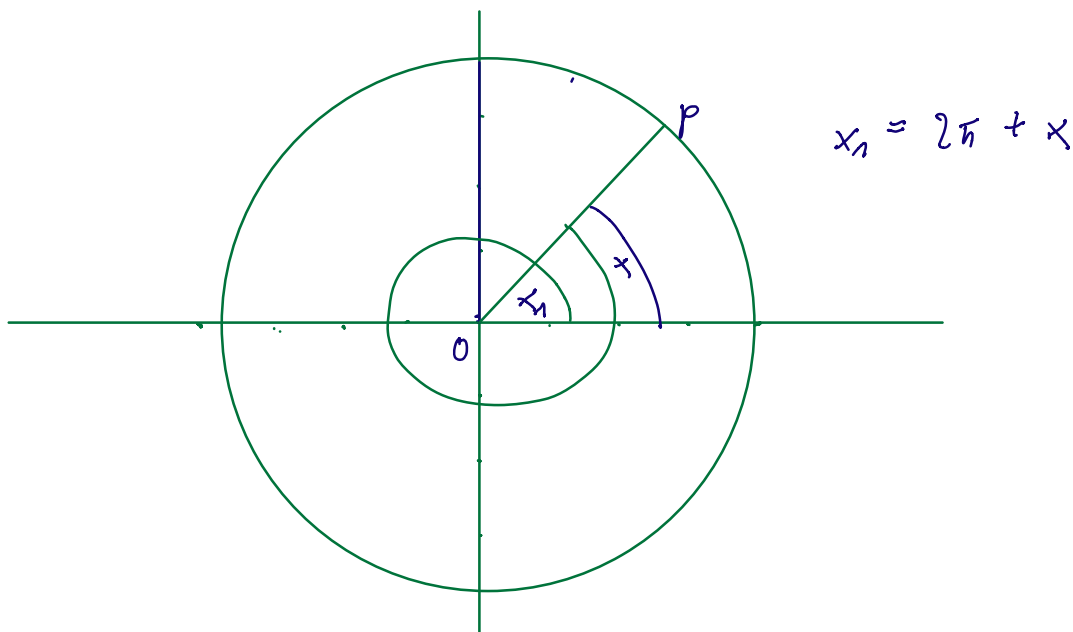
if ...

Nas de finicije funkcij $\cos(x)$ in $\sin(x)$:

Naj bo p točka na enotski krogu s središčem v izhodišču. Naj zveznica med p in izhodiščem s pozitivnim kotom abscise sia delaja kot x . Potem je abscisna koordinata točke p enaka $\cos(x)$, ordinatna koordinata točke p pa je enaka $\sin(x)$.

Tako definiramo definirane vrednosti vseh kotov $x \in [0, 2\pi)$.

Vrednosti $\cos(x)$ in $\sin(x)$ pri $x > 2\pi$ in $x < 0$.



Oke koordinati tačk p_1 i pripada luku x im
 p_2 , i pripada luku $x + 2\pi$ sa iste dužine,
 sig'no su isto tačke: Torej:

$$\begin{array}{ccc} \cos(x + 2\pi) & = & \cos(x) \\ \text{x-koordinata } p_2 & & \text{x-koordinata } p_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sin(x + 2\pi) & = & \sin(x) \\ \text{y-koordinata } p_2 & & \text{y-koordinata } p_1 \end{array}$$

Od tad lako je dokazati:

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$$

Pri tam j k lubo pozitywno ali pa negatywno
ulo steilo.

Definicija: Funkcija

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

f **periodična s periodo T** , če zanj velja

$$f(x + T) = f(x)$$

za $\forall x \in \mathbb{R}$.

Neposredna poslatična definicija: Naj bo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodična funkcija. Potem zanj velja:

$$f(x + kT) = f(x)$$

22 $\forall k \in \mathbb{Z}$ in 22 vs2k $x \in \mathbb{R}$.

Res : iz definicije periodičnosti sledi:

$$f(x+T) = f(x+T) = f(x)$$

$$f(x+2T) = f(x)$$

$\vdots$

$$f(x+kT) = f(x) \quad k \in \mathbb{N}.$$

P2u h2u p2 iz definicije periodičnosti sledi:

$$22 \forall x \text{ imamo: } f(x-T) = f(x-T+T) = f(x)$$

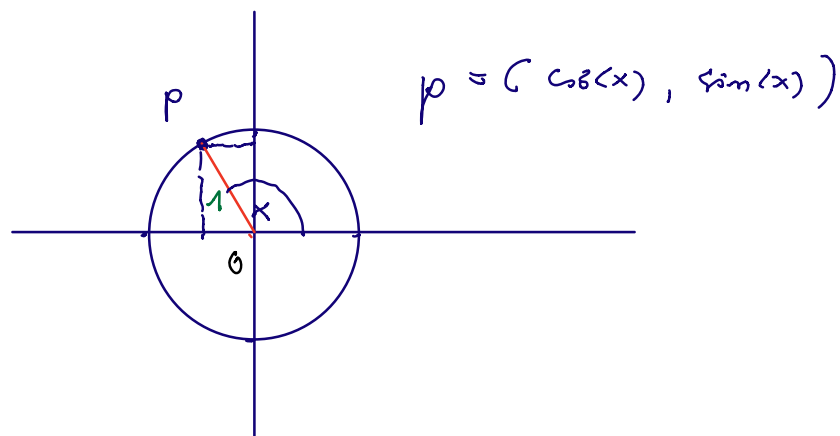
$$f(x-2T) = f(\underbrace{x-T}_{\text{po zgornj}} - T) \overset{\text{po zgornj}}{=} f(x-T) \overset{\text{po zgornj}}{=} f(x)$$

$$f(x-kT) = f(x) \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Skupaj:

$$f(x+kT) = f(x) \quad 22 \forall k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}.$$

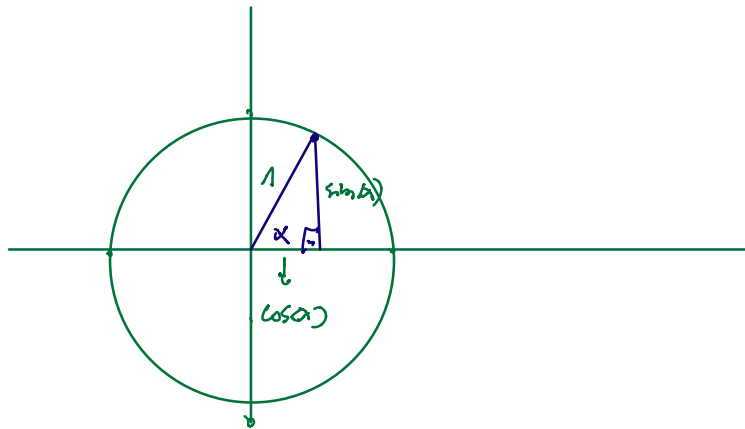
Iz naše definicije $\cos(x)$, $\sin(x)$ sledi:
 Obe funkciji sta periodični s periodo 2π .



Iz definicije $\cos(x)$ in $\sin(x)$ s pomočjo
 enotske krožnice dobimo po Pitagorinem izreku
 pomembno identiteto:

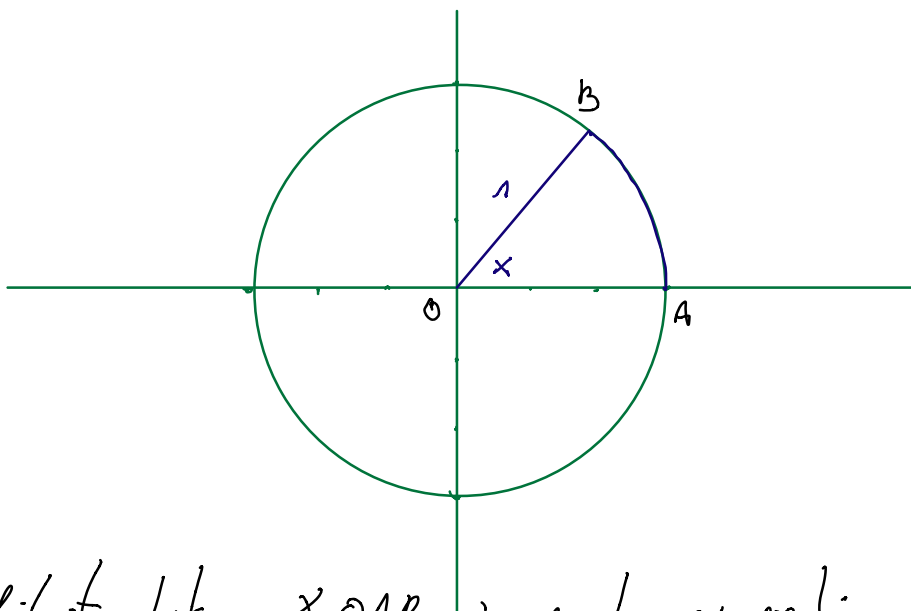
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$



Ker y hipotenüszusunk mindig 1 , azaz Pitagorasz-izetk
 es az $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Definíció: Definíció az x szögnek,



Kelendő azt hogy $\angle OAB$ x szögnek x radiános, és
 x ívhossz is, azaz a kör ív hossza x egység

koorināti punkta x ir $\cos t$.

Atbilstošs izteikums:

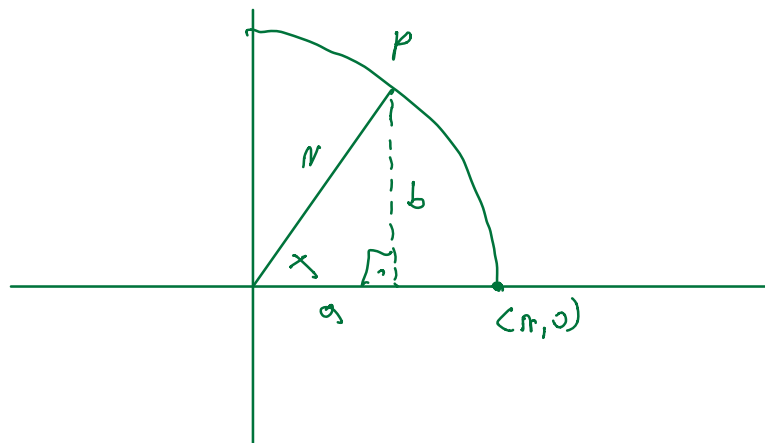
Sapazīņosim R : Lineāru transformāciju

$$R(x) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

kā visāla tādus $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ varatikt un kat x
ir pozitīvu skaitli, jo ir bāzi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

podarot x matricā:

$$R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$



$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

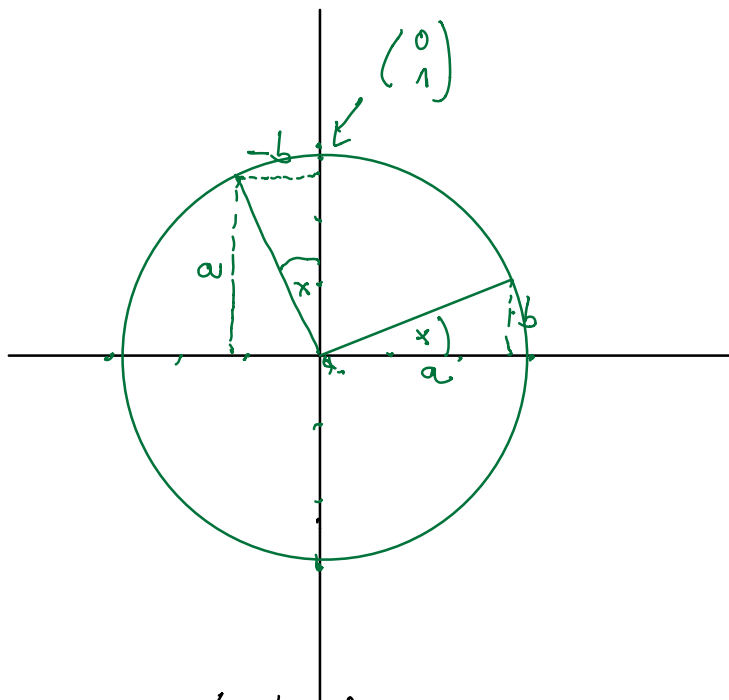
$$\text{Imaginary: } \frac{a}{r} = \cos(x) \quad a = r \cos(x)$$

$$\frac{b}{r} = \sin(x) \quad b = r \sin(x)$$

$$R(x) \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(x) \\ r \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$R(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$



$$R(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Torej:

$$R(x) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Zastavimo sedaj razmislimo najprej za kot x_1 , nato pa še za kot x_2 . Linearna transformacija, ki prijetu črni rotacijo je tudi kompozitum

$$R(x_2) \circ R(x_1) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Matrica, ki prijetu črni transformaciji pa je **matricni produkt** matrik $R(x_2)$ in $R(x_1)$

$$R(x_2) \cdot R(x_1).$$

Vemo pa: Če izvedemo najprej rotacijo za x_1 , nato pa za x_2 razmislimo, dobimo isto, kot če bi razmislimo samo enkrat znotraj za $x_1 + x_2$

To nam vzbudi metrično intuicijo:

$$R(x_2) \cdot R(x_1) = R(x_1 + x_2)$$

To prove: $R(x_2) \cdot R(x_1)$

$$\begin{pmatrix} \cos(x_2) & -\sin(x_2) \\ \sin(x_2) & \cos(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x_1) & -\sin(x_1) \\ \sin(x_1) & \cos(x_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\cos(x_2) \cos(x_1)}_{*} - \underbrace{\sin(x_2) \sin(x_1)}_{*} & -\cos(x_2) \sin(x_1) - \sin(x_2) \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

$$= R(x_2 + x_1)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x_2 + x_1) & -\sin(x_2 + x_1) \\ \sin(x_2 + x_1) & \cos(x_2 + x_1) \end{pmatrix}$$

Proves:

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2) - \sin(x_1) \sin(x_2)$$

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) + \sin(x_2) \cos(x_1)$$