

Linearne preslikave 1. del

Definicija linearne preslikave

Zanimajo nas preslikave med vektorskimi prostori, ki ohranjajo strukturo (se pravi ohranjajo vsoto in produkt s skalarjem). Običajno jim pravimo linearne preslikave, včasih pa tudi homomorfizmi vektorskih prostorov.

Definicija linearne preslikave

Naj bosta U in V vektorska prostora nad istim poljem F .

- Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **aditivna**, če velja $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$ za vsaka $u_1, u_2 \in U$.
- Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **homogena**, če velja $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ za vsak $u \in U$ in vsak $\alpha \in F$.
- Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **linearna**, če je aditivna in homogena.

Opomba: Namesto $L(u)$ bomo pogosto pisali kar Lu . Za linearno preslikavo torej velja $L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2$ in $L(\alpha u) = \alpha Lu$.

Opomba: Aditivna preslikava iz U v V je isto kot homomorfizem Abelovih grup iz $(U, +)$ v $(V, +)$.

Aditivnost in homogenost lahko združimo v eno lastnost:

Trditev

Naj bosta U in V vektorska prostora nad istim poljem F . Preslikava $L: U \rightarrow V$ je linearna natanko tedaj, ko velja

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L u_1 + \alpha_2 L u_2 \quad (1)$$

za vsaka $u_1, u_2 \in U$ in vsaka $\alpha_1, \alpha_2 \in F$.

Dokaz: Pokažimo najprej, da iz linearnosti sledi lastnost (1). Če je L aditivna, velja $L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = L(\alpha_1 u_1) + L(\alpha_2 u_2)$. Če je L homogena, velja $L(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 L u_1$ in $L(\alpha_2 u_2) = \alpha_2 L u_2$. Če je L tako aditivna kot homogena, potem torej velja (1).

Pokažimo še, da iz lastnosti (1) sledi linearnost. Če L zadošča (1), potem velja $L(u_1 + u_2) = L(1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2) = 1 \cdot L u_1 + 1 \cdot L u_2 = L u_1 + L u_2$ in $L(\alpha u) = L(\alpha \cdot u + 0 \cdot u) = \alpha \cdot L u + 0 \cdot L u = \alpha L u$. Torej je L tako aditivna kot homogena.

Primer - Projekcija na x os

Če točko (x, y) v ravnini projeciramo na x os, dobimo točko $(x, 0)$. Dokažimo, da je $L(x, y) = (x, 0)$ linearna preslikava. To sledi iz

$$\begin{aligned} L(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) &= L(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \\ &= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, 0) = \alpha_1(x_1, 0) + \alpha_2(x_2, 0) = \alpha_1L(x_1, y_1) + \alpha_2L(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Primer - Vrtež okrog izhodišča

Če točko $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ v ravnini zavrtimo okrog izhodišča za kot τ v nasprotni smeri od urinega kazalca, potem dobimo točko $(r \cos(\phi + \tau), r \sin(\phi + \tau)) = (x \cos \tau - y \sin \tau, x \sin \tau + y \cos \tau)$, kjer smo uporabili adicijska izreka za $\cos$ in $\sin$. Dokažimo, da je $L(x, y) = (x \cos \tau - y \sin \tau, x \sin \tau + y \cos \tau)$ linearna preslikava:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1(x_1, y_1) + \alpha_2(x_2, y_2)) &= L(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \\ &= ((\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) \cos \tau - (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) \sin \tau, (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) \sin \tau + (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) \cos \tau) = \\ &= \alpha_1(x_1 \cos \tau - y_1 \sin \tau, x_1 \sin \tau + y_1 \cos \tau) + \alpha_2(x_2 \cos \tau - y_2 \sin \tau, x_2 \sin \tau + y_2 \cos \tau) = \\ &= \alpha_1L(x_1, y_1) + \alpha_2L(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Primer - Odvajanje

Vemo, da za odvod velja

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{in} \quad (cf)' = cf'$$

kjer je c konstanta. Odvod je torej linearna preslikava iz vektorskega podprostora vseh odvedljivih funkcij v $\mathbb{R}^{[a,b]}$ v vektorski prostor $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Primer - Integriranje

Vemo, da je določeni integral definiran za zvezne funkcije in da velja

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{in} \quad \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Torej je $\int_a^b$ linearna preslikava iz vektorskega podprostora vseh zveznih funkcij v $\mathbb{R}^{[a,b]}$ v vektorski prostor $\mathbb{R}$.

Posplošitve linearnih preslikav

Opomba: Če sta U in V vektorska prostora nad različnima poljema, potem ne moremo definirati linearne preslikave iz U v V . Lahko pa definiramo neko posplošitev linearne preslikave.

Recimo, da je U vektorski prostor nad poljem F in V vektorski prostor nad poljem K . Naj bo $\phi: F \rightarrow K$ homomorfizem polj. Preslikava $L: U \rightarrow V$ **ϕ -homogena**, če velja $L(\alpha u) = \phi(\alpha)L(u)$ za vsak $u \in U$ in vsak $\alpha \in F$. Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **ϕ -linearna**, če je aditivna in ϕ -homogena.

Primer: Če je $F = K = \mathbb{C}$ in $\phi(z) = \bar{z}$ (se pravi $\phi(a + bi) = a - bi$), potem ϕ -linearni preslikavi iz U v V pravimo **konjugirano linearna** preslikava.

Opomba: Naj bosta U in V vektorska prostora nad poljem F in naj bo K podpolje v F . Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **K -homogena**, če velja $L(\alpha u) = \alpha Lu$ za vsak $\alpha \in K$ in vsak $u \in U$. Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **K -linearna**, če je aditivna in K -homogena.

Primer: Konjugiranje je $\mathbb{R}$ -linearna preslikava iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$, ni pa $\mathbb{C}$ -linearna.

Opomba: Če sta U in V modula nad kolobarjem F , potem linearni preslikavi iz U v V rečemo **homomorfizem modulov**.

Linearni izomorfizmi

Definicija linearnega izomorfizma

Bijektivni linearni preslikavi pravimo **linearni izomorfizem**.

Trditev 1

Inverzna preslikava od linearnega izomorfizma je spet linearni izomorfizem.

Dokaz: Naj bosta U in V vektorska prostora nad poljem F in naj bo $L: U \rightarrow V$ bijektivna linearna preslikava. Radi bi pokazali, da je tudi njena inverzna preslikava $L^{-1}: V \rightarrow U$ linearna.

Za vsaka vektorja $v_1, v_2 \in V$ in vsaka skalarja $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ velja

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 L^{-1}v_1 + \alpha_2 L^{-1}v_2) &= L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2 = \\ &= \alpha_1 L(L^{-1}v_1) + \alpha_2 L(L^{-1}v_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = L(L^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \end{aligned}$$

kjer je $u_1 = L^{-1}v_1$ in $u_2 = L^{-1}v_2$. Ker je L injektivna preslikava, sledi

$$\alpha_1 L^{-1}v_1 + \alpha_2 L^{-1}v_2 = L^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

Torej je L^{-1} res linearna preslikava.

Trditev 2

Kompozitum dveh linearnih izomorfizmov je spet linearni izomorfizem.

Dokaz: Zadošča dokazati, da je kompozitum dveh linearnih preslikav spet linearna preslikava. Naj bosta $L: U \rightarrow V$ in $K: V \rightarrow W$ dve linearni preslikavi. Potem velja

$$\begin{aligned}(K \circ L)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= K(L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) = K(\alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2) = \\ &= \alpha_1 K(Lu_1) + \alpha_2 K(Lu_2) = \alpha_1 (K \circ L)u_1 + \alpha_2 (K \circ L)u_2\end{aligned}$$

Opomba: Pravimo, da sta dva vektorska prostora (nad istim poljem) **linearno izomorfna**, če obstaja linearni izomorfizem iz prvega v drugega. Iz Trditev 1 in 2 sledi, da je linearna izomorfnost ekvivalenčna relacija. (Trditev 1 da simetričnost, Trditev 2 pa tranzitivnost. Refleksivnost sledi iz dejstva, da je identična preslikava linearni izomorfizem.)

Opomba: Iz naslednjega primera sledi, da sta katerakoli dva enako-razsežna vektorska prostora nad istim poljem linearno izomorfna.

Primer - Linearni izomorfizem iz F^n v n -razsežen vektorski prostor

Radi bi dokazali, da je vsak n -razsežen vektorski prostor nad F linearno izomorfen F^n .

Naj bo V n -razsežen vektorski prostor nad F in naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V . Definirajmo preslikavo $\phi_{\mathcal{B}}: F^n \rightarrow V$ s predpisom

$$\phi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Ker je $\mathcal{B}$ ogrodje, je $\phi_{\mathcal{B}}$ surjektivna. Ker je $\mathcal{B}$ linearno neodvisna, je $\phi_{\mathcal{B}}$ injektivna. Pokažimo še, da je $\phi_{\mathcal{B}}$ linearna preslikava. To sledi iz

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{B}}(\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n)) &= \phi_{\mathcal{B}}(\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n)v_n = \alpha(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + \\ &\quad + \beta(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \alpha \phi_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) + \beta \phi_{\mathcal{B}}(y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Torej je $\phi_{\mathcal{B}}$ linearni izomorfizem. Njegova inverzna preslikava je $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$. Po trditvi je tudi inverzna preslikava linearni izomorfizem.

Primer - Linearni izomorfizem iz $M_{m,n}(F)$ v $\mathcal{L}(F^n, F^m)$

Naj bo F polje in naj bosta m in n naravni števili. Naj bo $\mathcal{L}(F^n, F^m)$ vektorski prostor vseh linearnih preslikav iz F^n v F^m . Seštevanje je definirano z $(L_1 + L_2)u := L_1u + L_2u$, množenje s skalarjem pa z $(\alpha L)u := \alpha Lu$. Naj bo $M_{m,n}(F)$ vektorski prostor vseh $m \times n$ matrik nad F . Konstruirali bomo linearni izomorfizem iz $M_{m,n}(F)$ v $\mathcal{L}(F^n, F^m)$.

Za vsako $m \times n$ matriko $A = [a_{i,j}]$ definirajmo preslikavo L_A iz F^n v F^m

$$L_A(x_1, \dots, x_n) = (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n)$$

To lahko zapišemo kot $L_A x = Ax$, kjer x smatramo za stolpčni vektor. Iz lastnosti matričnega množenja sledi, da je L_A linearna preslikava.

Radi bi pokazali, da je preslikava $A \rightarrow L_A$ iz $M_{m,n}(F)$ v $\mathcal{L}(F^n, F^m)$ linearni izomorfizem. Linearnost sledi iz

$$L_{\alpha A + \beta B} x = (\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx = \alpha L_A x + \beta L_B x = (\alpha L_A + \beta L_B)x$$

Bijektivnost dokažemo tako, da konstruiramo inverzno preslikavo.

Vsaki linearni preslikavi $L: F^n \rightarrow F^m$ lahko priredimo $m \times n$ matriko $\begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix}$, kjer je $e_1, \dots, e_n$ standardna baza za F^n . Pokažimo, da je $L \mapsto \begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix}$ inverzna preslikava od preslikave $A \mapsto L_A$.

Najprej preverimo, da je kompozitum $A \mapsto L_A \mapsto \begin{bmatrix} L_A e_1 & \dots & L_A e_n \end{bmatrix}$ identična preslikava. Če upoštevamo, da je $\begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = I$, dobimo

$$\begin{bmatrix} L_A e_1 & \dots & L_A e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A e_1 & \dots & A e_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = A$$

Preverimo še, da je kompozitum $L \mapsto \begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix} \mapsto L_{\begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix}}$ identična preslikava. Za vsak $x \in F^n$ velja

$$\begin{aligned} L_{\begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix}} x &= \begin{bmatrix} Le_1 & \dots & Le_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= x_1 Le_1 + \dots + x_n Le_n = L(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = Lx \end{aligned}$$

kjer smo pri prvem enačanju upoštevali definicijo L_A , pri drugem bločno množenje matrik in pri tretjem linearnost preslikave L . □

Matrika linearne preslikave

Linearni preslikavi med dvema vektorskima prostoroma bi radi priredili matriko. To prirejanje bo odvisno od izbire baz v obeh vektorskih prostorih.

Naj bosta U in V vektorska prostora nad istim poljem F in naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava. Izberimo bazo $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ za U in bazo $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_m\}$ za V . Razvijmo vektorje $Lu_1, \dots, Lu_n$ po bazi $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \alpha_{1,1}v_1 + \dots + \alpha_{1,m}v_m \\ &\vdots \\ Lu_n &= \alpha_{n,1}v_1 + \dots + \alpha_{n,m}v_m \end{aligned} \tag{2}$$

Skalarje $\alpha_{i,j}$ iz (2) zložimo v matriko

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \dots & \alpha_{n,m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

ki ji pravimo **matrika linearne preslikave L glede na bazi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$.**

Opomba: Bodite pozorni na to, da smo skalarje iz i -te vrstice v (2) zložili v i -ti stolpec v (3). To si najlažje zapomnimo tako, da (3) zapišemo kot

$$[L]_{C \leftarrow B} := \begin{bmatrix} [Lu_1]_C & \dots & [Lu_n]_C \end{bmatrix} \quad (4)$$

kjer je $[v]_C$ stolpčni vektor iz koeficientov razvoja vektorja v po bazi C .

Opomba: Do definicije matrike linearne preslikave lahko pridemo tudi preko linearnih izomorfizmov. Kompozitum linearnih preslikav

$$F^n \xrightarrow{\phi_B} U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{\phi_C^{-1}} F^m$$

je linearna preslikava $\phi_C^{-1} \circ L \circ \phi_B$ iz F^n v F^m . Linearni izomorfizem iz $\mathcal{L}(F^n, F^m)$ v $M_{m,n}(F)$ ji priredi matriko

$$\begin{bmatrix} (\phi_C^{-1} \circ L \circ \phi_B)(e_1) & \dots & (\phi_C^{-1} \circ L \circ \phi_B)(e_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ker je $(\phi_C^{-1} \circ L \circ \phi_B)(e_i) = \phi_C^{-1}(L(\phi_B(e_i))) = \phi_C^{-1}(Lu_i) = [Lu_i]_C$ za vsak $i = 1, \dots, n$, se matrika (5) ujema z matriko (4).

Primeri matrik linearnih preslikav

Primer

Naj bo U vektorski prostor vseh realnih polinomov stopnje ≤ 3 in V vektorski prostor vseh realnih polinomov stopnje ≤ 2 . Za bazo prostora U vzemimo $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, za bazo prostora V pa $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$. Naj bo $D: U \rightarrow V$ odvajanje polinomov. Iščemo matriko $[D]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Razvijmo vektorje $D1, Dx, Dx^2, Dx^3$ po bazi $1, x, x^2$. Velja

$$D1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$Dx = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$Dx^2 = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$Dx^3 = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

Torej je

$$[D]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Primer

Če smatramo $\mathbb{C}$ za vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, potem je konjugiranje linearna preslikava iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$. Za bazi vzemimo $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{1, i\}$. Velja

$$\bar{1} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i$$

$$\bar{i} = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i$$

$$\text{Potem je } [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Primer

Naj bo A $m \times n$ matrika nad F in naj bo L_A linearna preslikava iz F^n v F^m , ki je definirana z $L_A x = Ax$. Naj bo $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ standardna baza za F^n in $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$ standardna baza za F^m . Velja

$$L_A e_1 = A e_1 = a_1 = a_{1,1} f_1 + \dots + a_{m,1} f_m$$

$$\vdots$$

$$L_A e_n = A e_n = a_m = a_{1,n} f_1 + \dots + a_{m,n} f_m$$

Torej je

$$[L_A]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = A$$

Primer

Naj bo V vektorski prostor in naj bo id_V identična preslikava iz V v V .
Naj bosta $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ in $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ bazi za V . Razvijmo

$$\text{id}_V(u_1) = u_1 = \alpha_{1,1}v_1 + \dots + \alpha_{1,n}v_n$$

$$\vdots$$

$$\text{id}_V(u_n) = u_n = \alpha_{n,1}v_1 + \dots + \alpha_{n,n}v_n$$

Dobimo enake razvoje kot pri definiciji prehodne matrike. Torej je

$$[\text{id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Lastnosti matrik linearnih preslikav

Matrike linearnih preslikav imajo podobne lastnosti kot prehodne matrike.

Izrek 1 - Osnovna formula

Naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava in naj bo u element U . Naj bo $\mathcal{B}$ baza za U in $\mathcal{C}$ baza za V . Potem velja $[Lu]_{\mathcal{C}} = [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

Dokaz: Razvijmo vektor u po bazi $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Dobimo

$$u = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \quad (6)$$

Ker je L linearna preslikava, iz (6) sledi

$$Lu = \beta_1 Lu_1 + \dots + \beta_n Lu_n \quad (7)$$

Za vsak $i = 1, \dots, n$ razvijmo Lu_i po bazi $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_m\}$. Dobimo

$$Lu_i = \alpha_{i,1} v_1 + \dots + \alpha_{i,m} v_m \quad (8)$$

Če razvoje (8) vstavimo v razvoj (7), dobimo

$$\begin{aligned} Lu &= \beta_1 (\alpha_{1,1} v_1 + \dots + \alpha_{1,m} v_m) + \dots + \beta_n (\alpha_{n,1} v_1 + \dots + \alpha_{n,m} v_m) \\ &= (\beta_1 \alpha_{1,1} + \dots + \beta_n \alpha_{n,1}) v_1 + \dots + (\beta_1 \alpha_{1,m} + \dots + \beta_n \alpha_{n,m}) v_m \end{aligned} \quad (9)$$

Iz (9) sledi

$$\begin{aligned} [Lu]_C &= \begin{bmatrix} \beta_1 \alpha_{1,1} + \dots + \beta_n \alpha_{n,1} \\ \vdots \\ \beta_1 \alpha_{1,m} + \dots + \beta_n \alpha_{n,m} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \dots & \alpha_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = [L]_{C \leftarrow B} [u]_B \end{aligned}$$

Izrek 2 - Matrika kompozituma linearnih preslikav

Naj bodo U , V in W vektorski prostori nad istim poljem in naj bosta $L: U \rightarrow V$ in $K: V \rightarrow W$ linearni preslikavi. Naj bo $\mathcal{B}$ baza za U , $\mathcal{C}$ baza za V in $\mathcal{D}$ baza za W . Potem velja $[K \circ L]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Dokaz: Naj bo $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Po formuli (4) velja

$$\begin{aligned} [K \circ L]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [(K \circ L)u_1]_{\mathcal{D}} & \dots & [(K \circ L)u_n]_{\mathcal{D}} \\ \vdots & & \vdots \\ [K(Lu_1)]_{\mathcal{D}} & \dots & [K(Lu_n)]_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [K(Lu_1)]_{\mathcal{D}} & \dots & [K(Lu_n)]_{\mathcal{D}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Po izreku 1 za vsak $i = 1, \dots, n$ velja

$$[K(Lu_i)]_{\mathcal{D}} = [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [Lu_i]_{\mathcal{C}} \quad (11)$$

Če (11) vstavimo v (10), dobimo

$$\begin{aligned} [K \circ L]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [Lu_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [Lu_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \\ &= [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \begin{bmatrix} [Lu_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [Lu_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = [K]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \end{aligned}$$

Pri tretjem enačaju smo uporabili formulo (4). □

Izrek 3 - Prehod na novo bazo

Naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava. Naj bosta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi za U ter $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$ bazi za V . Potem velja $[L]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})^{-1}$

Dokaz: Najprej zapišemo L kot $\text{id}_V \circ L \circ \text{id}_U$. Po izreku 2 velja

$$[\text{id}_V \circ L \circ \text{id}_U]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = [\text{id}_V]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\text{id}_U]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

Upoštevajmo še $[\text{id}_V]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ in $[\text{id}_U]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})^{-1}$.