

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

18. predavanje: Variacijski problem za funkcije več spremenljivk

V tem predavanju si bomo ogledali variacijski problem za funkcionalne na funkcijah več spremenljivk. Glavne teme:

- Euler-Lagrangejeva enačba za funkcije več spremenljivk
- Lagrangejeva enačba minimalnih grafov
- Geometrijska interpretacija in pojem minimalne ploskve
- Konformno imerzirane ploskve in povezava s harmoničnostjo
- Galerija minimalnih ploskev

OPOMBA: Prvi del predavanja do enačbe minimalnih grafov, njene geometrijske interpretacije ter galerije minimalnih ploskev je v tem dokumentu. Več o minimalnih ploskvah najdete v ločenem tekstu z naslovom

Minimal surfaces for undergraduates

Osnovni problem

Naj bo D kompaktna domena v $\mathbb{R}^2$ z odsekoma zveznim robom in naj bo $L : D \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2(D)$ (Lagrangian).

Na prostoru funkcij $f \in \mathcal{C}^2(D)$ definiramo funkcional

$$\mathcal{L}(f) = \int_D L(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)) dx dy.$$

Tako kot v osnovnem enorazsežnem primeru nas zanimajo stacionarne točke funkcionala $\mathcal{L}$, torej funkcije f s predpisano vrednostjo

$$f|_{\partial D} = u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$$

na robu domene, pri katerih je prva variacija funkcionala enaka 0:

$$\nabla_v \mathcal{L}(f) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(f + sv) = 0 \quad \text{za vse } v \in \mathcal{C}^2(D) \text{ z } v|_{\partial D} = 0.$$

Izračunajmo prvo variacijo $\nabla_v \mathcal{L}(f)$.

Prva variacija

$$\begin{aligned}\nabla_v \mathcal{L}(f) &= \int_D \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} L(x, y, f + sv, f_x + sv_x, f_y + sv_y) dx dy \\ &= \int_D \left(L_f v + L_{f_x} v_x + L_{f_y} v_y \right) dx dy.\end{aligned}$$

Za fiksen $y \in \mathbb{R}$ označimo

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}.$$

Ker je rob ∂D odsekoma gladek, je za večino vrednosti $y \in \mathbb{R}$ množica I_y unija končno mnogo kompaktnih intervalov ali pa prazna množica.

Ker je $v|_{\partial D} = 0$, dobimo z integracijo per partes

$$\int_{x \in I_y} L_{f_x} v_x dx = - \int_{x \in I_y} \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} \cdot v dx.$$

Če integriramo dobljeno identiteto po y , dobimo po Fubiniju

$$\int_D L_{f_x} v_x \, dx dy = - \int_D \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} \cdot v \, dx dy.$$

Analogno ugotovimo

$$\int_D L_{f_y} v_y \, dx dy = - \int_D \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} \cdot v \, dx dy.$$

Torej je

$$\nabla_v \mathcal{L}(f) = \int_D \left(L_f - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} \right) v \, dx dy.$$

Ta izraz je enak nič za vse funkcije $v \in \mathcal{C}^2(D)$ z $v|_{\partial D} = 0$ natanko tedaj, ko f zadošča naslednji **Euler-Lagrangejevi enačbi**:

$$L_f - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} = 0.$$

To je parcialna diferencialna enačba 2.reda za $f(x, y)$ z robnim pogojem $f|_{\partial D} = u$.

Primer: Lagrangejeva enačba minimalnih grafov

Problem: poiskati funkcijo $f \in \mathcal{C}^2(D)$ na kompaktni domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ z odsekoma glatkim robom z dano robno vrednostjo $f|_{\partial D} = u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, pri kateri ima graf

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

najmanjšo ploščino

$$\text{Area}(G_f) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

To je poseben primer **Plateaujevega problema**, ki sprašuje po ploskvah $S \subset \mathbb{R}^3$ z najmanjšo ploščino in predpisano sklenjeno robno krivuljo $\partial S \subset \mathbb{R}^3$.

Lagrangian je

$$L(x, y, f, f_x, f_y) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

$$L_f = 0, \quad L_{f_x} = \frac{f_x}{L}, \quad L_{f_y} = \frac{f_y}{L}$$

Euler-Lagrangejeva enačba:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{L} = \text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

Lagrangejeva enačba minimalnih grafov

Če izračunamo odvode in pomnožimo enačbo z L^3 , dobimo

$$\begin{aligned} f_{xx}L^2 - f_x L \frac{\partial}{\partial x} L(x, y, f, f_x, f_y) + f_{yy}L^2 - f_y L \frac{\partial}{\partial y} L(x, y, f, f_x, f_y) &= \\ f_{xx}L^2 - f_x L(L_{f_x} f_{xx} + L_{f_y} f_{xy}) + f_{yy}L^2 - f_y L(L_{f_x} f_{xy} + L_{f_y} f_{yy}) &= 0. \end{aligned}$$

Upošteva je $L \cdot L_{f_x} = f_x$ in $L \cdot L_{f_y} = f_y$ dobimo

$$f_{xx}(L^2 - f_x^2) + f_{yy}(L^2 - f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} = 0$$

in nazadnje iz $L^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$:

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

To je **Lagrangejeva enačba minimalnih grafov**.

Geometrijska interpretacija enačbe minimalnih grafov

Kaj je naravna geometrična interpretacija enačbe minimalnih grafov?

Odgovor na to vprašanje je našel J. B. Meusnier leta 1976:

Izrek (Meusnier)

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^2$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ zadošča enačbi minimalnih grafov natanko tedaj, ko imam njen graf $G_f \subset \mathbb{R}^3$ povprečno ukrivljenost enako nič v vsaki točki:

$$H = \kappa_1 + \kappa_2 = 0.$$

Tu sta $\kappa_1, \kappa_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji na D , ki v vsaki točki predstavljata **glavni normalni ukrivljenosti** ploskve G_f (največjo in najmanjšo).

To pomeni, da je vsaka točka na minimalni ploskvi sedelna točka in njena **Gaussova ukrivljenost**

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = -\kappa_1^2 \leq 0$$

je nepozitivna funkcija na D .

Pojem povprečne ukrivljenosti je obrazložen v članku

[F. Forstnerič, Minimal surfaces for undergraduates, razdelek 3. \(Na učilnici.\)](#)

V razdelku 4 istega članka je podan dokaz zgornjega izreka (Izrek 4.1).

Opažanje

Poglejmo ponovno enačbo minimalnih grafov:

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

Če v neki notranji točki $(x_0, y_0) \in D \setminus \partial D$ velja

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0,$$

kar pomeni da je (x_0, y_0) kritična točka funkcije f , je v tej točki zgornja enačba ekvivalentna

$$\operatorname{div} \nabla f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

kjer je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceov operator. V taki točki (x_0, y_0) je grafna preslikava

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

konformna, to je, ohranja kote, saj je njen diferencial v (x_0, y_0) preslikava $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$.

Minimalne ploskve in Laplaceov operator

To napeljuje na misel, da obstaja zveza med minimalnimi ploskvami in harmoničnimi funkcijami.

To v resnici drži, če izberemo konformno parametrizacijo dane ploskve $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3.$$

Tu je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ imerzija, ki parameterizira ploskev S .

Konformnost je ekvivalentna naslednjima dvema pogojema:

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad |\mathbf{x}_u| = |\mathbf{x}_v|.$$

Iz izreka o obstoju izotermalnih koordinat sledi, da ima vsaka imerzirana ploskev konformno parametrizacijo.

(Seveda pa ni vsaka ploskev globalno parametrizirana z ravninsko domeno, zato argumenti v nadaljevanju veljajo lokalno.)

Osnovni izrek teorije minimalnih ploskev

Naslednji izrek je kombinacija izrekov 5.2 in 6.1 v zgoraj omenjenem članku [F., Minimal surfaces for undergraduates](#). Rezultat sledi iz del Lagrangeja (1760) in Meusnierja (1776).

Izrek

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ domena z odsekoma glatkim robom. Konformna imerzija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ razreda $\mathcal{C}^2$ parametrizira minimalno ploskev v $\mathbb{R}^3$ (to je, $\mathbf{x}$ je stacionarna točka funkcionala ploščine pri fiksni vrednosti robne preslikave $\mathbf{x} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$) natanko tedaj, ko je $\mathbf{x}$ harmonična preslikava

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = 0.$$

To velja natanko tedaj, ko je povprečna ukrivljenost ploskve identično nič.

Natančnejši rezultat (za imerzirane ploskve v $\mathbb{R}^n$ za poljuben $n \geq 3$) je izrek 6.3 v omenjenem članku, ki podaja zvezo med Laplaceom $\Delta \mathbf{x}$ in vektorjem povprečne ukrivljenosti (mean curvature vector) v vsaki točki ploskve.

V razdelku 7 je prikazana Enneper–Weierstrassova formula za minimalne ploskve (izrek 7.1), ki podaja povezavo s kompleksno analizo.

Razdelek 8 članka vsebuje nekaj eksplicitnih primerov in nekateri od njih so prikazani na ilustracijah v nadaljevanju tega predavanja.

Minimalne rotacijske ploskve

Pred tem si oglejmo preprostejši problem, pri katerem iščemo minimalne rotacijske ploskve. Naj bosta (x, y) koordinati na $\mathbb{R}^2$. V zgornji polravnini si izberemo dve točki

$$T_0(a, A), \quad T_1(b, B), \quad a < b, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Iščemo funkcijo $y = y(x) > 0$ na $[a, b]$ z $y(a) = A$, $y(b) = B$, tako da ima rotacijske ploskev v $\mathbb{R}^3$ z enačbo

$$y^2 + z^2 = y(x)^2, \quad a \leq x \leq b$$

minimalno ploščino. Njena ploščina je

$$P(y) = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

To je isti problem kot primer 1 v predavanju 15, kjer smo iskali obliko prosto viseče verige pod vplivom gravitacije. Ugotovili smo, da so rešitve **veržnice** iz družine

$$y = C \cosh \frac{x - D}{C}, \quad C > 0, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Katenoide

Zaključek je, da **so katenoide edine rotacijske minimalne ploskve** v $\mathbb{R}^3$ (**Leonhard Euler, 1744**).

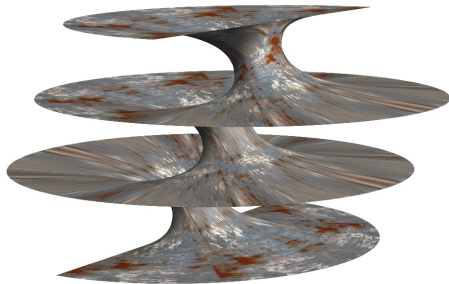


Totalna Gaussova ukrivljenost katenoide $S \subset \mathbb{R}^3$ je

$$\int_S K dA = \int_S \kappa_1 \kappa_2 dA = -4\pi.$$

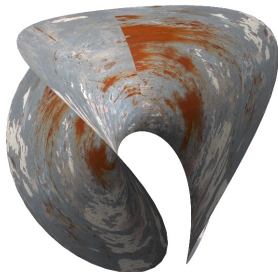
To je najmanjša možna absolutna totalna ukrivljenost pravilno imerzirane minimalne ploskve v $\mathbb{R}^3$, razen za ravnino, kjer je enaka nič.

Galerija minimalnih ploskev: Riemannova ploskev (1867)



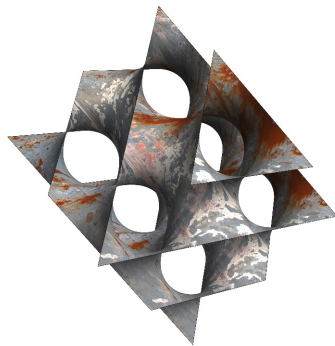
B. Riemann je v posthumnem članku (1867) opisal enoparametrično družino periodičnih minimalnih ploskev, parametriziranih z ravninskimi območji. Njegove ploskve imajo totalno Gaussovo ukrivljenost $-\infty$.

Enneperjeva ploskev (1868)



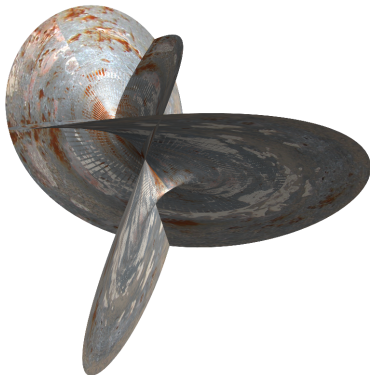
Poleg katenoide je Enneperjeva ploskev ena najpreprostejših minimalnih ploskev v $\mathbb{R}^3$. Parametrizirana je z ravnino $\mathbb{R}^2$ in njena totalna Gaussova ukrivljenost je -4π (kot pri katenoidi).

Schwarzovi ploskvi (1883)



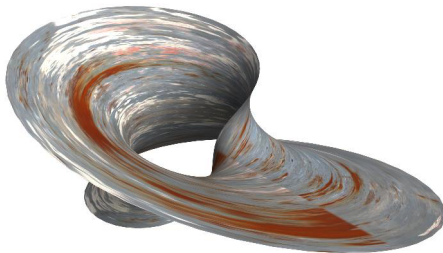
Schwarzova **primitivna** (levo) in **diamantna** (desno) minimalna ploskev sta peridočni vloženi minimalni ploskvi.

Hennebergova ploskev



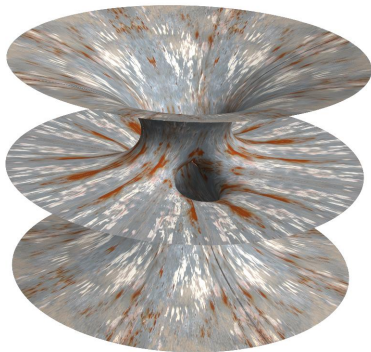
Hennebergova ploskev (1875) je bila prva znana neorientabilna minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$. Ima kritično točko, torej ni imerzirana.

Meeksov minimalni Möbiusov trak (1981)



W. H. Meeks je leta 1981 opisal prvi znan primer pravilno imerzirane neorientabilne minimalne ploskve v $\mathbb{R}^3$ — minimalni Möbiusov trak s totalno Gaussovo ukrivljenostjo -6π .

Costina ploskev



Costa's surface (1984) je kompletna vložena minimalna ploskev roda 1 v $\mathbb{R}^3$ s tremi konci in totalno Gaussovo ukivljenostjo -12π .

Lopezova ploskev (1993)



Lopezova ploskev je neorientabilna imerzirana minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$, ki je parametrizirana s punktirano Kleinovo steklenico (odstranimo eno točko). Njena totalna Gaussova ukrivljenost je -8π .

Alarcon–Forstnerič–Lopezov minimalni Möbiusov trak (2020)



Prvi znani pravilno vložen minimalni Möbiusov trak v $\mathbb{R}^4$. Prikazana je projekcija v $\mathbb{R}^3$. Njegova totalna Gaussova ukrivljenost je -4π .