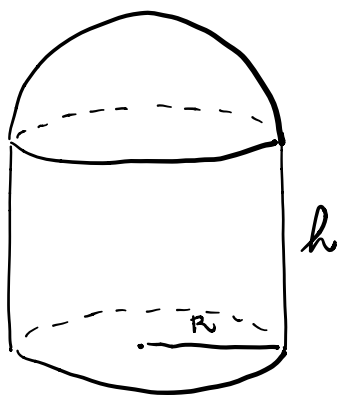




SILOS SEŠTAVLJATA PLAŠČ VALJA IN POLOVICA SFERE. GLEDE NA POVRŠINO JE IZDELAVA KUPOLE DVAKRAT DRAŽJA OD VALJASTEGA DELA. PRI DANEM VOLUMNU V DOLOČI DIMENZIJE NAJCENEJŠEGA SILOSA.

REŠITEV:

$C \dots$ SKUPNA CENA $k > 0 \dots$ CENA IZDELAVE NA m^2
 $P \dots$ POVRŠINA $V \dots$ DANI VOLUMEN

ISČENJE MINIMUM FUNKCIJE:

$$C = k \cdot P = k \cdot \left(\underbrace{2\pi R h}_{\text{PLAŠČ VALJA}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2}_{\text{POLOVICA POVRŠINE SFERE}} \cdot \underbrace{2}_{\text{DVAKRATNA CENA}} \right)$$

PRI POGOJU:

$$V = \underbrace{\pi R^2 h}_{\text{VOLUMEN VALJA}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{4\pi R^3}{3}}_{\text{POLOVICA VOLUMNA KROGLE}}$$

TEŽAVA: C JE ZAROKRAT ŠE ODVISNA OD R IN h .

REŠITEV: h IZRAZIMO S POMOČJO R IN V .

$$\pi R^2 h = V - \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$h = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2R}{3}$$

$$C(R) = k \cdot \left(2\pi R \left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2R}{3} \right) + 4\pi R^2 \right)$$

$$C(R) = 2\pi k \left(\frac{V}{\pi R} + \frac{4R^2}{3} \right)$$

NA KATEREM INTERVALU IŠČEMO MINIMUM?

$$R=0$$

NAJMANJŠI
MOŽNI RADIJ

$$h=0$$

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$

NAJVEČJI MOŽNI

RADIJ

t.j. ZANIMA NAS $R \in (0, \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}]$

OPAZIMO: ~ KO $R \downarrow 0$, GRE $C(R) \rightarrow \infty$

~ ČE $h=0$, TO NI MINIMUM, KER JE
VALJASTI DEL CELEJSI KOT KUPOLA.



VALJASTEKA
DELA NI!

SKLEP: MINIMUM BO V KATERI OD
STACIONARNIH TOČK.

$$C'(R) = 2\pi k \left(-\frac{V}{\pi R^2} + \frac{8}{3} R \right) = 0$$

$$\frac{8}{3} R = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$R^3 = \frac{3V}{8\pi}$$

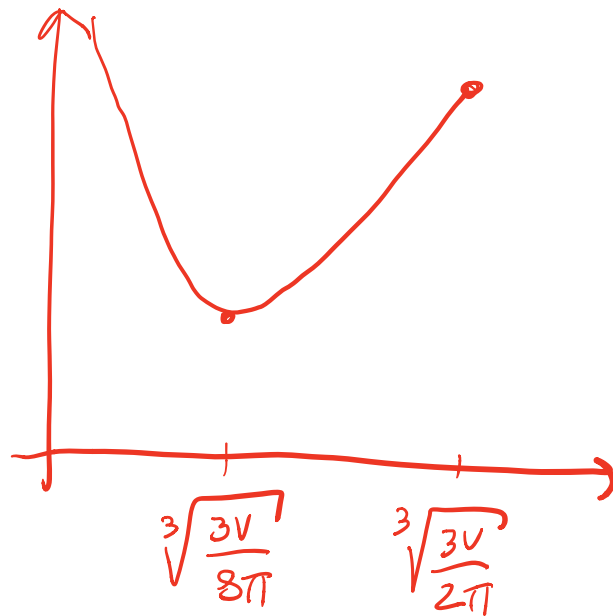
$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3} R = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{64\pi^2}}} - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{64V}{9\pi}} - \sqrt[3]{\frac{V}{9\pi}} = 4\sqrt[3]{\frac{V}{9\pi}} - \sqrt[3]{\frac{V}{9\pi}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{V}{9\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

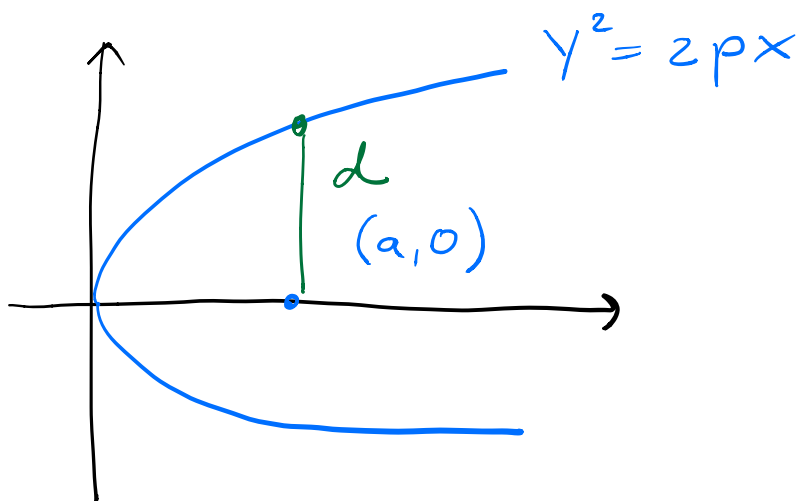
GRAF FUNKCIJE $C(R)$:



OPOMBA:

KER NAS ZANIMAJO
LE DIME NZIJE,
RAČUNANJE CENE
NI POTREBNO.

$a, p > 0$. NA PARABOLI $y^2 = 2px$ IŠČEMO TOČKO,
KI JE NAJBЛИŽJA TOČKI $(a, 0)$.



REŠITEV:

$$d(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

KER JE (x, y) NA PARABOLI, PA VEJA
TUDI $y^2 = 2px$.

t.j. BREZ ŠKODE ZA SPOŠNOST
IŠČEMO MINIMUM FUNKCIJE:

$$F(x) = (d(x))^2 = (x-a)^2 + 2px$$

NA INTERVALU $x \in [0, \infty)$.

KANDIDATI:

(i) KRAJISČI:

$$F(0) = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

(ii) STAC. TOČKA:

$$F'(x) = 2(x-a) + 2p = 0$$

$$x_3 = a - p$$

$$F(a-p) = p^2 + 2ap - 2p^2 = 2ap - p^2$$

OPAZIMO, DA VELJA:

$$f(0) \geq f(a-p)$$

$$a^2 \geq 2ap - p^2$$

$$a^2 + p^2 - 2ap \geq 0$$

$$(a-p)^2 \geq 0$$

~
↖ ENAČAJ DOBIMO,
KO JE $a=p$.

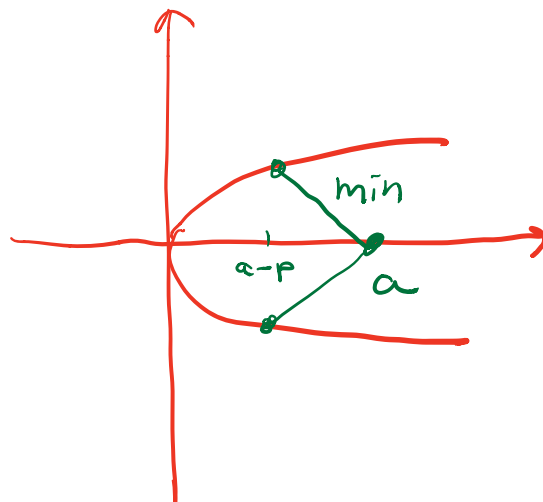
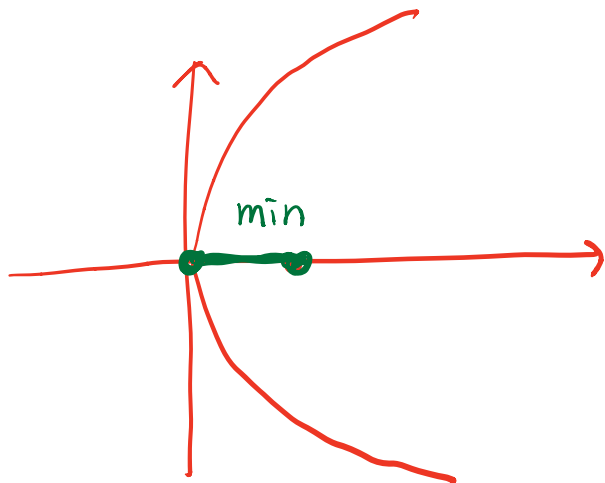
VSEENO PA TO NE POMENI, DA JE
MINIMUM VEDNO V STACIONARNI TOČKI.

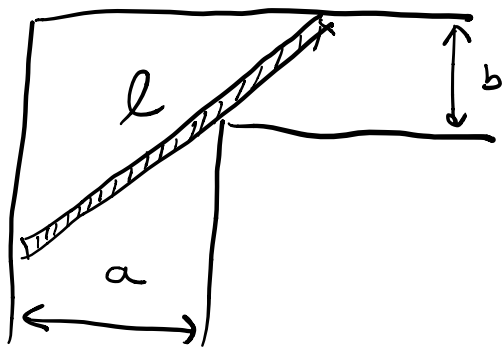
RES, ČE $p > a$, JE $x_s < 0$, ZATO
NE LEŽI V $[0, \infty)$.

SKLEP:

~ ČE $p > a$, JE MINIMUM V $x=0$

~ ČE $p \leq a$, JE MINIMUM V $x=a-p$





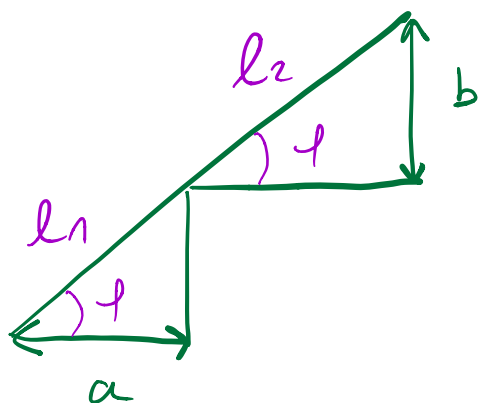
DOLOČI MAKSIMALNO DOLŽINO
LESTVE, KI JO LAHKO NESEMO
SKOZI VOHAL HODNIKOV ŠIRINE
 $a > 0$ IN $b > 0$.

KLJUČNO VPRAŠANJE:

{ S KATERO SPREMENLJIVKO IZRAZITI l

ODGovor:

{ S KOTOM V VOHALU



$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$l = l_2 + l_1$$

$$l = \frac{b}{\sin \varphi} + \frac{a}{\cos \varphi}$$

DRUGO KLJUČNO VPRAŠANJE:

{ ALI IŠČEMO min ALI max

NEPRIČAKOVAN ODGovor:

{ IŠČEMO min

ZAKAJ?

ZANIMA NAS PRI KATEREM KOTU φ
JE NAVJEZJA MOŽNA DOLŽINA NAJMANJŠA
t.j. KATERI KOT JE NAJBOLJ OMEJUJOČ
ZA DOLŽINO LESTVE!

KER VELJA:

$$l(\varphi) \rightarrow \infty \quad \text{ZA } \varphi \downarrow 0 \text{ IN } \varphi \uparrow \frac{\pi}{2},$$

BO MINIMUM DOSEŽEN V STACIONARNI TOČKI.

$$l'(\varphi) = -\frac{b \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$a \sin^3 \varphi = b \cos^3 \varphi \quad / : a \cdot \cos^3 \varphi$$

$$\tan^3 \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\varphi_s = \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

IZRAZIMO ŠE DOLŽINO LESTVE:

$$\begin{aligned} l(\varphi_s) &= \frac{b}{\sin \varphi_s} + \frac{a}{\cos \varphi_s} = \frac{1}{\cos \varphi_s} \left(a + \frac{b}{\tan \varphi_s} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi_s} \left(a + \frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}} \right) = \frac{1}{\cos \varphi_s} \left(a + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

PO DRUGI STRANI PA VELJA:

$$\left(\frac{1}{\cos \varphi_s}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s = 1 + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$$

KER JE $\varphi_s \in (0, \frac{\pi}{2})$, VELJA TUDI:

$$\frac{1}{\cos \varphi_s} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Torej je:

$$\begin{aligned} l(\varphi_s) &= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(a + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right) \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot a \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= a \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

KONČNI
REZULTAT