

METRIČNI PROSTOR

12.1.2021

Metrični prostor (M, d) je neprazna množica M , skupaj s preslikavo d , ki zadošča aksiomom metrike:

$$M1: d(x, y) \geq 0$$

$$M2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3: d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Krogle s središčem v x in polmerom r v metriki d :

$$\text{Odprta krogla: } K(x, r) = \{y; d(x, y) < r\}$$

$$\text{Zaprta krogla: } \bar{K}(x, r) = \{y; d(x, y) \leq r\}$$

1) Katere preslikave določajo metriko na $\mathbb{R}$?

$$(a) d(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$(b) d(x, y) = 2|x - y|$$

$$(c) d(x, y) = \min\{2, |x - y|\}$$

$$a) d(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$M1: d(x, y) \geq 0 \text{ zaradi absolutne vrednosti } \checkmark$$

$$M2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - y^2| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y //$$

NI METRIKA!

$$b) d(x, y) = 2|x - y|$$

$$M1: d(x, y) \geq 0 \text{ zaradi absolutne vrednosti } \checkmark$$

$$M2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2|x - y| = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \checkmark$$

$$M3: d(x, y) = 2|x - y| = 2|-(y - x)| = 2|y - x| = d(y, x) \checkmark$$

$$M4: d(x, z) = 2|x - z| = 2 \cdot |(x - y) + (y - z)| \leq 2 \cdot (|x - y| + |y - z|) = 2|x - y| + 2|y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

JE METRIKA!

$$c) d(x, y) = \min \{2, |x - y|\}$$

$$\pi_1: d(x, y) = \min \{2, |x - y|\} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\pi_2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \min \{2, |x - y|\} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \checkmark$$

$$\pi_3: d(x, y) = \min \{2, |x - y|\} = \min \{2, |y - x|\} = d(y, x) \quad \checkmark$$

$$\pi_4: \underline{d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)}$$

$$\text{Lemo: } d(x, y) \leq 2 \quad \forall x, y$$

$$1. d(x, y) = 2 \text{ ali } d(y, z) = 2 \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) \geq 2 \text{ in } d(x, z) \leq 2$$

$$\Rightarrow d(x, z) \leq 2 \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \checkmark$$

$$2. d(x, y) < 2 \text{ in } d(y, z) < 2 \Rightarrow d(x, y) + d(y, z) = |x - y| + |y - z| \stackrel{\text{Troj. II}}{\geq} |x - z|$$

$$d(x, z) = \min \{2, |x - z|\} \leq |x - z| \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \checkmark$$

11:

Naj bosta $M = (0, \infty)$ in $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $d(x, y) = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right|$.

(a) Dokaži, da je (M, d) metrični prostor.

(b) Določi kroglji $K(1, \frac{1}{4})$ in $\overline{K}(1, 2)$.

a) (M, d) metrični prostor

$$M \neq \emptyset$$

$$\underline{d \text{ metrika na } M} \quad d(x, y) = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right|$$

$$\pi_1: d(x, y) \geq 0 \text{ zaradi absolutne vrednosti} \quad \checkmark$$

$$\pi_2: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \quad \checkmark$$

$\uparrow$
 $x, y \in M = (0, \infty)$

$$\pi_3: d(x, y) = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| = \left| \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right| = d(y, x)$$

$$\pi_4: \underline{d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)}$$

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} \right| = \left| \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \right) \right| \stackrel{\text{Tri.}}{\leq} \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| + \left| \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \right| = d(x, y) + d(y, z) \quad \checkmark$$

$$b) K(1, \frac{1}{4}) =$$

$$K(1, \frac{1}{4}) = \{y \in \mathbb{R}; d(1, y) = \frac{1}{4}\} = \{y \in \mathbb{R}; |1 - \frac{1}{y^2}| = \frac{1}{4}\}$$

$$|1 - \frac{1}{y^2}| = \frac{1}{4}$$

$$1. \frac{1}{y^2} \leq 1; \quad \text{oz. } y^2 \geq 1 \quad \text{oz. } y \geq 1 (y > 0)$$

$$1 - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{y^2}$$

$$3y^2 = 4$$

$$y^2 = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$y \in [1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$$

$$2. \frac{1}{y^2} > 1; \quad \text{oz. } y^2 < 1 \quad \text{oz. } y \in (0, 1)$$

$$\frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$$

$$4 < 5y^2$$

$$y^2 > \frac{4}{5}$$

$$y > \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$y \in (\frac{2}{\sqrt{5}}, 1)$$

$$y \in (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$$

$$K(1, \frac{1}{4}) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$$

$$\bar{K}(1, 2) = \{y \in \mathbb{R}; d(1, y) \leq 2\} = \{y \in \mathbb{R}; |1 - \frac{1}{y^2}| \leq 2\}$$

$$1. \frac{1}{y^2} \leq 1; \quad y \geq 1$$

$$1 - \frac{1}{y^2} \leq 2$$

$$-\frac{1}{y^2} \leq 1$$

$$\frac{1}{y^2} \geq -1$$

vedno

$$y \in [1, \infty)$$

$$2. \frac{1}{y^2} > 1; \quad 0 < y < 1$$

$$\frac{1}{y^2} - 1 \leq 2$$

$$\frac{1}{y^2} \leq 3$$

$$1 \leq 3y^2$$

$$y^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$$

$$y \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$$

$$\bar{K}(1, 2) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$$

1) Na množici $M = (0, \infty)^2$ definiramo $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $d(\underline{x}, \underline{y}) = \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right|$.

a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.

b) Izračunaj in skiciraj $K((1,1), 1)$.

a) $M \neq \emptyset$ ✓

d je metrika

$$M1: d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0 \quad \checkmark \quad (|\sim| + |\sim| \geq 0)$$

$$M2: d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| = 0 \text{ in } \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{y_1}{x_1} = 0 \text{ in } \ln \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = 1 \text{ in } \frac{y_2}{x_2} = 1 \Leftrightarrow y_1 = x_1 \text{ in } y_2 = x_2 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$$

$$M3: d(\underline{x}, \underline{y}) = \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right| = \left| -\ln \frac{x_1}{y_1} \right| + \left| -\ln \frac{x_2}{y_2} \right| = \left| \ln \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^{-1} \right| + \left| \ln \left(\frac{x_2}{y_2} \right)^{-1} \right| = \left| \ln \frac{x_2}{y_2} \right| + \left| \ln \frac{x_1}{y_1} \right| = d(\underline{y}, \underline{x}) \quad \checkmark$$

$$M4: \underline{d(\underline{x}, \underline{z})} \leq \underline{d(\underline{x}, \underline{y})} + \underline{d(\underline{y}, \underline{z})}$$

$$\left| \ln \frac{z_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{z_2}{x_2} \right| = \left| \ln \frac{z_1}{x_1} - \ln x_1 \right| + \left| \ln z_2 - \ln x_2 \right| =$$

$$= \left| \ln \frac{z_1}{x_1} - \ln y_1 + \ln y_1 - \ln x_1 \right| + \left| \ln z_2 - \ln y_2 + \ln y_2 - \ln x_2 \right| \stackrel{T_{11}}{\leq}$$

$$\leq \left| \ln \frac{z_1}{x_1} - \ln y_1 \right| + \left| \ln y_1 - \ln x_1 \right| + \left| \ln z_2 - \ln y_2 \right| + \left| \ln y_2 - \ln x_2 \right| =$$

$$= \left| \ln \frac{z_1}{y_1} \right| + \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{z_2}{y_2} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right| =$$

$$= \left(\left| \ln \frac{z_1}{y_1} \right| + \left| \ln \frac{z_2}{y_2} \right| \right) + \left(\left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right| \right) =$$

$$= d(\underline{y}, \underline{z}) + d(\underline{x}, \underline{y}) \quad \checkmark$$

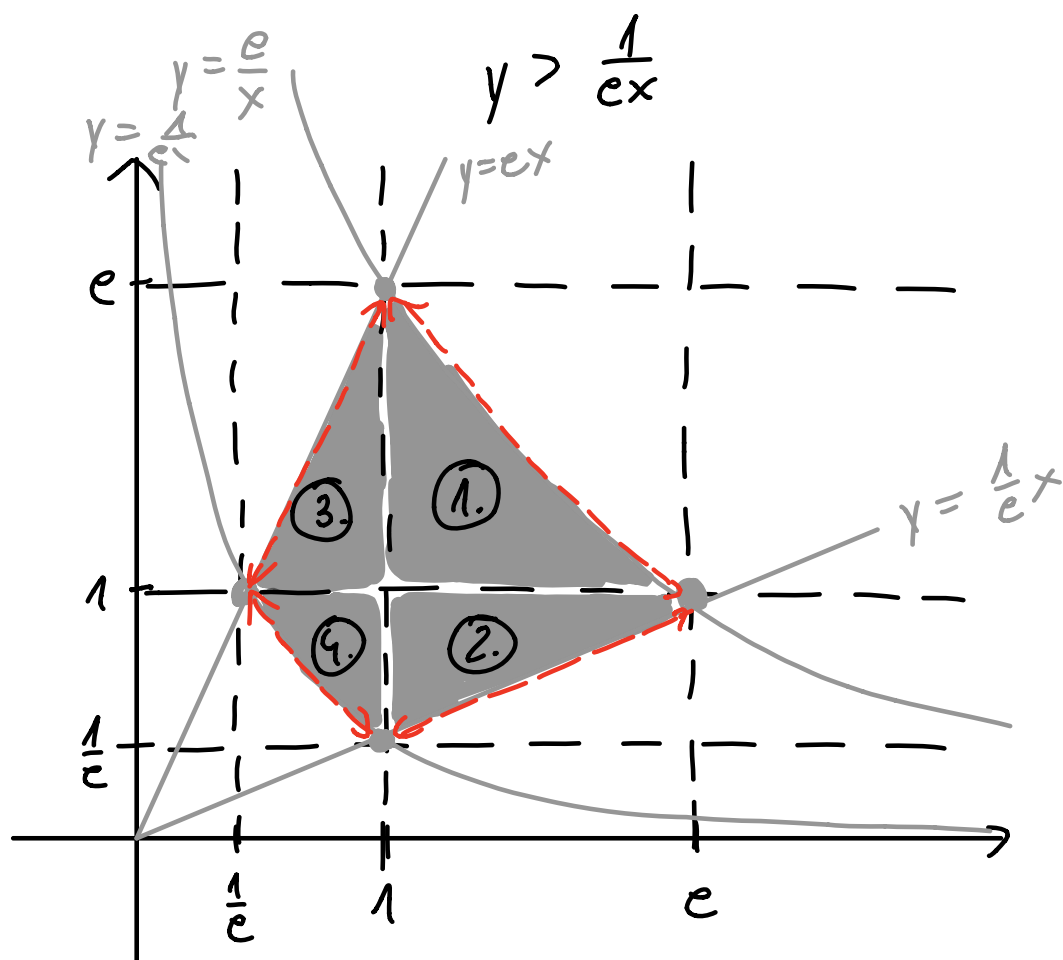
$$b) K((1,1), 1) = \{ (x, y) \in M \mid |\ln x| + |\ln y| < 1 \}$$

$$1.) \underline{\ln x \geq 0 \text{ in } \ln y \geq 0}: \ln x + \ln y < 1 \Leftrightarrow \ln(x \cdot y) < 1 \Leftrightarrow x \cdot y < e \Leftrightarrow y < \frac{e}{x} \text{ za } x \neq 0$$

$$2.) \underline{\ln x \geq 0 \text{ in } \ln y < 0}: \ln x - \ln y < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} < e \Leftrightarrow y > \frac{x}{e}$$

$$3.) \underline{\ln x < 0 \text{ in } \ln y \geq 0}: -\ln x + \ln y < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{y}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} < e \Leftrightarrow y < e \cdot x$$

$$4.) \underline{\ln x < 0 \text{ in } \ln y < 0}: -\ln x - \ln y < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x \cdot y} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x \cdot y} < e \Leftrightarrow y > \frac{1}{e \cdot x}$$



METRIKE d_p

15.1.2021

d_p metrike na $\mathbb{R}^n$:

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}; \quad p \geq 1$$

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Metriki d_1 pravimo *manhattanska*, metriki d_2 *evklidska*, metriki d_∞ pa *maksimum* metrika.

Naj bo $p \geq 1$ in $a < b$. **Integralska metrika** d_p na prostoru $\mathcal{C}[a, b]$ zveznih funkcij na intervalu $[a, b]$ je definirana po predpisu:

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Maksimum metrika d_∞ :

$$d_\infty(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$



Katera točka na premici $y = 2x + 1$ je najbližja točki $(0, 0)$ v metriki d_1 , d_2 in d_∞ ?

$$f_i(x) = d_i((x, 2x+1), (0, 0))$$

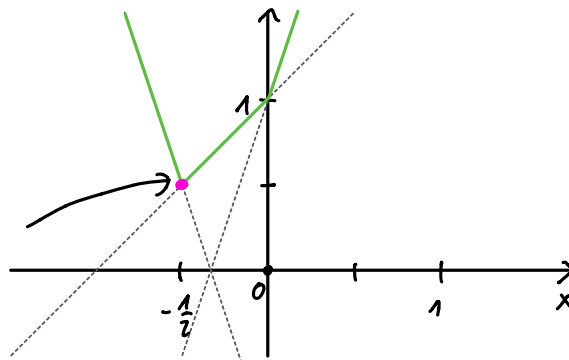
$$d_1: \quad f_1(x) = d_1((x, 2x+1), (0, 0)) = |x-0| + |2x+1-0| = |x| + |2x+1|$$

iščemo minimum funkcije f_1

$f_1(x)$	$-3x-1$	$x+1$	$3x+1$
	$-x-2x-1$	$-x+2x+1$	$x+2x+1$
x		$-\frac{1}{2}$	0

graf $f_1(x)$:

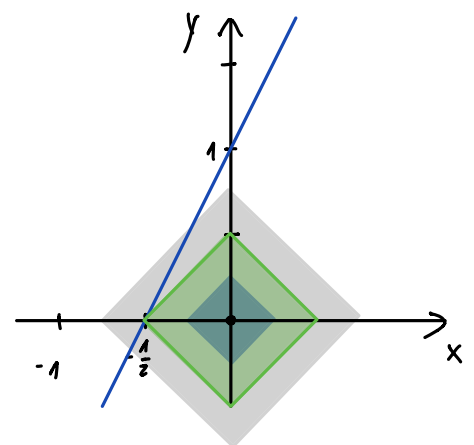
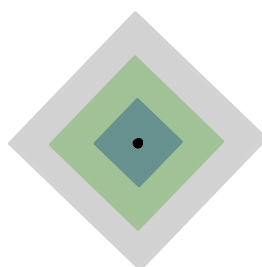
minimum
v $x = -\frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ točka $(-\frac{1}{2}, 0)$

Kako se to
vidi s
pomočjo
krogel?

Krogle s središčem v
 $(0, 0)$ v metriki d_1 :



$$d_2: f_2(x) = \sqrt{(1x-0)^2 + (2x+1-0)^2} = \sqrt{x^2 + (2x+1)^2}$$

$f_2(x) \geq 0$: $f_2(x)$ doseže minimum $\Leftrightarrow f_2^2(x)$ doseže minimum

$$F_2(x) = f_2^2(x) = x^2 + (2x+1)^2$$

$$F_2'(x) = 2x + 2(2x+1) \cdot 2 = 2x + 8x + 4 = 10x + 4$$

$$F_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

$\Rightarrow$ točka $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

$$d_\infty: f_\infty(x) = \max\{|x|, |2x+1|\}$$

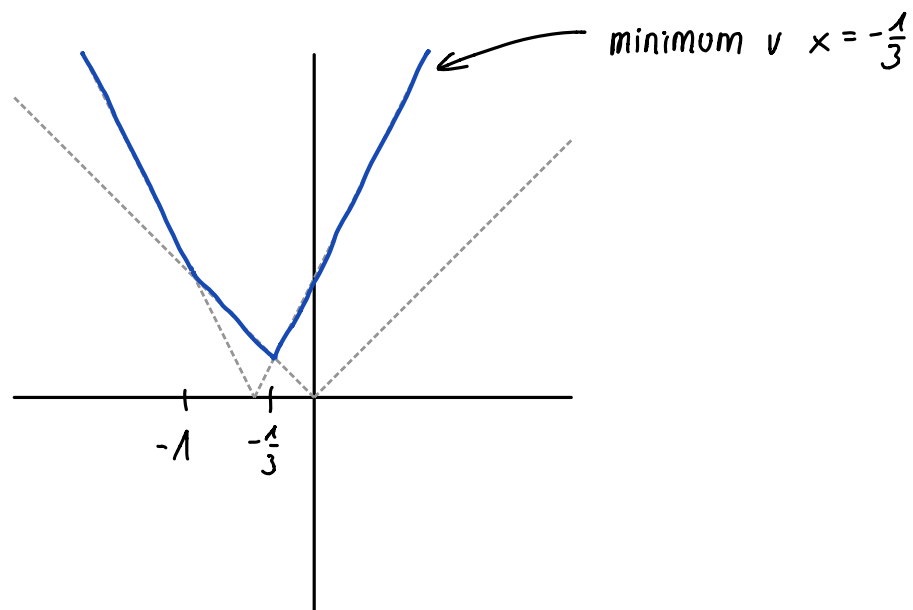
$|x| \geq |2x+1|$ čc:

$$\cdot x \geq 0: x \geq 2x+1 \Rightarrow x \leq -1 //$$

$$\cdot -\frac{1}{2} \leq x \leq 0: -x \geq 2x+1 \Rightarrow 3x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$$

$$\cdot x < -\frac{1}{2}: -x \geq -2x-1 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x \in (-1, -\frac{1}{2})$$

čc $x \in (-1, -\frac{1}{3})$



1. a) Poišči vse točke v $(\mathbb{R}^2, d_2)$, ki so enako oddaljene od $(1, 0)$ in $(0, 1)$.

b) Poišči vse točke v $(\mathbb{R}^3, d_2)$, ki so enako oddaljene od $(1, 1, 1)$ in $(1, 2, 3)$

$$a) \quad d_2((x, y), (1, 0)) = d_2((x, y), (0, 1))$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \quad /^2$$

$$\cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + y^2 = \cancel{x^2} + y^2 - 2y + \cancel{1}$$

$$x = y$$

$$b) \quad d_2((x, y, z), (1, 1, 1)) = d_2((x, y, z), (1, 2, 3))$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \quad /^2$$

$$\cancel{(x-1)^2} + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \cancel{(x-1)^2} + (y-2)^2 + (z-3)^2$$

$$\cancel{y^2} - 2y + 1 + \cancel{z^2} - 2z + 1 = y^2 - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 6z + 9$$

$$-2y - 2z + 2 = -4y - 6z + 13$$

$$2y + 4z = 11$$

$$4z = 11 - 2y$$

$$z = \frac{11 - 2y}{4}$$

1) Naj bosta $f(x) = x^3$ in $g(x) = 2 - x^2$.

a) Naj bo $M = C([-1, 1])$. Izračunaj $d_1(f, g)$ in $d_\infty(f, g)$.

b) Naj bo $M = C([-2, 2])$. Izračunaj $d_1(f, g)$ in $d_\infty(f, g)$.

$$\begin{aligned} a) \quad d_1(f, g) &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - 2| dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + 2) dx = \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3} \right) + 2 - (-2) = -\frac{2}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{10}{3}}} \end{aligned}$$

$x^3 + x^2 - 2 = \overbrace{(x-1)}^0 \overbrace{(x^2+2x+2)}^0$
 za $x \in [-1, 1]$

$$d_\infty(f, g) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 + x^2 - 2|$$

$$(x^3 + x^2 - 2)' = 0 \quad 1. \quad x = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2 = -2$$

$$3x^2 + 2x = 0 \quad 2. \quad x = -\frac{2}{3} \rightarrow x^3 + x^2 - 2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} - 2 = \frac{-8 - 54 + 12}{27} = \underline{\underline{-\frac{50}{27}}}$$

$$x \cdot (3x + 2) = 0 \quad | -2 | > | -\frac{50}{27} |$$

kandidati za max: $0, -\frac{2}{3}, 1, -1$

$$x=1: x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$x=-1: x^3 + x^2 - 2 = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d_\infty(f, g) = 2}}$$

$$\begin{aligned} b) \quad d_1(f, g) &= \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \\ &= \int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2) dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2) dx = \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 \right) + \frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 2 \right) = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 12 = -\frac{3}{6} - \frac{4}{6} + \frac{72}{6} = \underline{\underline{\frac{65}{6}}} \end{aligned}$$

$$d_\infty(f, g) = \max_{-2 \leq x \leq 2} |f(x) - g(x)| = \underline{\underline{10}}$$

kandidati: $0, -\frac{2}{3}, -2, 2$

$$\begin{aligned} |f(2) - g(2)| &= 10 & |f(0) - g(0)| &= 2 \\ |f(-2) - g(-2)| &= 6 & |f(-\frac{2}{3}) - g(-\frac{2}{3})| &= \frac{50}{27} \end{aligned}$$

Odprtost/zaprta množice v metričnem prostoru

Naj bo A podmnožica metričnega prostora.

Notranjost množice A sestavljajo tiste točke a , za katere obstaja kroglja $K(a, r)$, ki je vsebovana v A .

Zunanost množice A sestavljajo tiste točke a , za katere obstaja kroglja $K(a, r)$, ki ima z A prazen presek. Zunanost množice A je torej notranjost njenega komplementa.

Rob množice A sestavljajo točke, ki niso niti notranje niti zunanje, t. j. točke a , pri katerih vsaka kroglja $K(a, r)$ vsebuje tako točke, ki so v A , kot točke, ki niso v A .

Množica A je odprta, če so vse njene točke notranje, torej če ne vsebuje nobene svoje robne točke.

Množica A je zaprta, če vsebuje vse svoje robne točke.

D: Za spodnje podmnožice metričnega prostora $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ugotovi, ali so zaprte/odprte:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

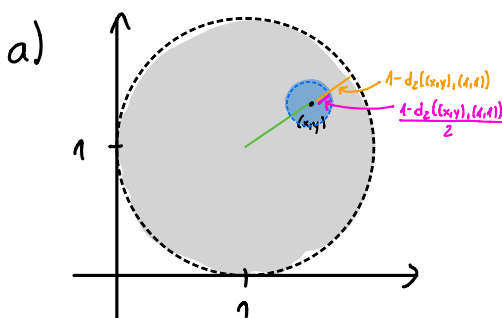
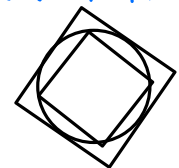
(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1, y \geq 1\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1, y > 1\}$

(e) $E = \mathbb{R} \times \{0\}$

D: razmisli še
za $(\mathbb{R}^2, d_1)$

namig



• $(x, y) \in A \Rightarrow d_2((x, y), (1, 1)) < 1$

$\Rightarrow K((x, y), r) \subset A$ za $r = \frac{1 - d_2((x, y), (1, 1))}{2}$

$\Rightarrow A$ je odprta (vse njene točke so notranje)

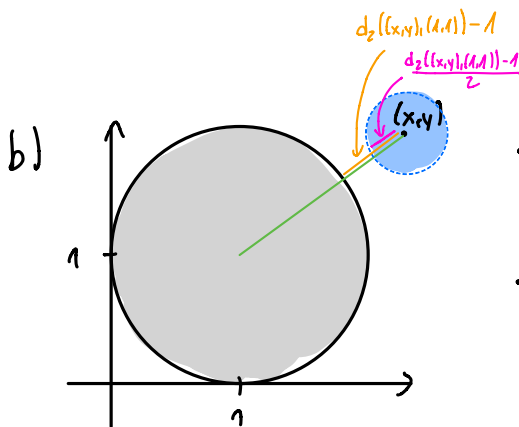
• $(2, 1) \notin A$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Tedaj je $(2 - \frac{\varepsilon}{2}, 1) \in K((2, 1), \varepsilon) \cap A \Rightarrow (2, 1)$ robna točka množice A

$\Rightarrow A$ ni zaprta (ne vsebuje vseh svojih robnih točk).

Da kratko: rob množice A je krožnica s središčem v $(1, 1)$ in polmerom 1.

rob v celoti leži zunaj množice $A \Rightarrow$ vse točke množice A so notranje $\Rightarrow A$ je odprta

$\Rightarrow A$ ne vsebuje vseh svojih robnih točk $\Rightarrow A$ ni zaprta

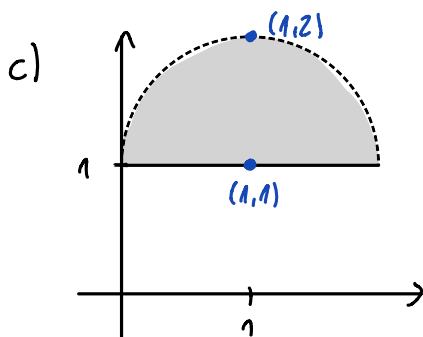


- $(2,1) \in B$. $(2,1)$ robna točka množice B (pokažemo kot v a) primeru)
 $\Rightarrow B$ ni odprta (vsebuje vsaj eno robno točko)
- B je zaprta $\Leftrightarrow B^c$ je odprta: $(x,y) \in B^c \Rightarrow d_2((x,y), (1,1)) > 1$
 $\Rightarrow K((2,1), r) \subset B^c$ za $r = \frac{d_2((x,y), (1,1)) - 1}{2} > 0$
 $\Rightarrow$ vsaka točka $(x,y) \in B^c$ je notranja točka množice B^c
 $\Rightarrow B^c$ je odprta

Na kratko: rob množice B je krožnica s središčem v $(1,1)$ in polmerom 1.

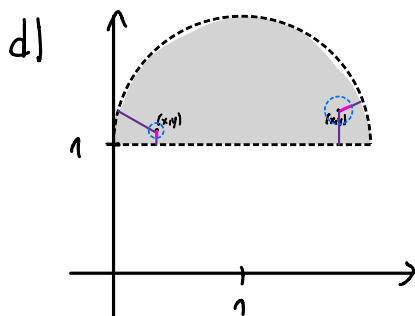
rob v celoti leži znotraj množice $B \Rightarrow B$ je zaprta

$\Rightarrow$ vse točke množice B niso notranje $\Rightarrow B$ ni odprta



Točki $(1,1)$ in $(1,2)$ sta robni točki množice C .
 (pokažemo kot za točko $(2,1)$ v a) in b) primeru)

- $(1,1) \in C \Rightarrow C$ vsebuje vsaj eno robno točko $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ vse točke množice C niso notranje $\Rightarrow$
 $\Rightarrow C$ ni odprta
- $(1,2) \notin C \Rightarrow C$ ne vsebuje vseh svojih robnih točk $\Rightarrow$
 $\Rightarrow C$ ni zaprta



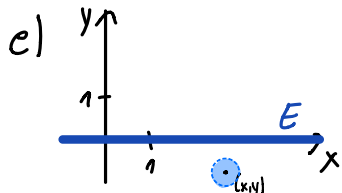
- $(1,2) \notin D \Rightarrow D$ ni zaprta

- $(x,y) \in D \Rightarrow K((x,y), r) \subset D$ za $r = \min \left\{ \frac{1 - d_2((x,y), (1,1))}{2}, \frac{y-1}{2} \right\}$
 $\Rightarrow D$ je odprta

Na kratko: rob množice D je unija zgornje polovice krožnice s središčem v $(1,1)$ in polmerom 1 in daljice $\sqrt{(x,1); x \in [-1,1]}$

rob v celoti leži zunaj množice $D \Rightarrow D$ je odprta

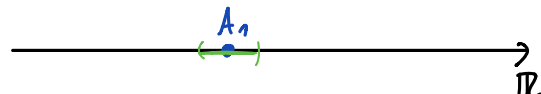
(rob ni prazna množica) $\Rightarrow D$ ni zaprta



- $(x,y) \in E$ je robna točka množice E
 $\Rightarrow$ vse točke množice E so robne $\Rightarrow$ niso notranje
 $\Rightarrow E$ ni odprta
- $(x,y) \in E^c \Rightarrow K((x,y), r) \subset E^c$ za $r = \frac{|y|}{2} \Rightarrow E^c$ odprta $\Rightarrow E$ zaprta

10. Na realni osi, opremljeni z običajno metriko, gledamo množice: $A_1 = \{42\}$, $A_2 = [42, 43]$, $A_3 = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$, $A_4 = A_3 \cup \{0\}$, $A_5 = \mathbb{Z} \cup (1, 2)$, $A_6 = \mathbb{Z} \cup (3/2, 2)$ in $A_7 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $A_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A_9 = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Za vsako od njih določite notranjost in rob ter še, ali je odprta in ali je zaprta. Določite to še za interval $(0, \infty)$, ki ga gledamo kot podmnožico metričnega prostora $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z običajno metriko.

✓ dodatna za vajo

• $A_1 = \{42\}$ 
 $K(A_1, r) \neq A_1$ za $r > 0$

notranjost: $\emptyset$

rob: A_1
 $\nwarrow K(A_1, r) \cap A_1 \neq \emptyset$ in $K(A_1, r) \cap A_1^c \neq \emptyset$ za poljuben $r > 0$

$\Rightarrow A_1$ ni odprta (vsebuje vsaj eno robno točko)
 A_1 je zaprta (vsebuje vse robne točke)

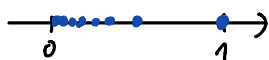
• $A_2 = [42, 43]$ 

notranjost: $(42, 43)$

rob: $\{42, 43\}$

A_2 ni odprta (42 je robna točka, ki je vsebovana v A_2)
 A_2 ni zaprta (43 je robna točka, ki ni vsebovana v A_2)

• $A_3 = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$



notranjost: $\emptyset$

rob: $A_3 \cup \{0\}$

$1/n$ je robna točka

$\frac{1}{n} \in K(\frac{1}{n}, r) \cap A_3 \neq \emptyset$
 $\cap$
 A_3 in

$K(\frac{1}{n}, r) \cap A_3^c \neq \emptyset$

A_3 ni odprta
 A_3 ni zaprta

0 je robna točka

naj bo $r > 0$ poljuben
 $\Rightarrow \exists n. \frac{1}{n} < r \Rightarrow K(0, r) \cap A_3 \neq \emptyset$
 $\frac{1}{n+2} < r \Rightarrow K(0, r) \cap A_3^c \neq \emptyset$

• $A_4 = A_3 \cup \{0\}$

notranjost: $\emptyset$

rob: A_4

A_4 ni odprta

A_4 je zaprta

• $A_5 = \mathbb{Z} \cup (1, 2)$



notranjost: $(1, 2)$
rob: $\mathbb{Z}$

A_5 ni odprta
 A_5 je zaprta

• $A_6 = \mathbb{Z} \cup (\frac{3}{2}, 2)$



notranjost: $(\frac{3}{2}, 2)$
rob: $\mathbb{Z} \cup \{\frac{3}{2}\}$

A_6 ni odprta
 A_6 ni zaprta

• $A_7 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



notranjost: A_7
rob: $\mathbb{Z}$

A_7 je odprta
 A_7 ni zaprta

• $A_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

notranjost: $\emptyset$
rob: $\mathbb{R}$

← spomnimo se: za vsako realno število a obstaja zaporedje racionalnih števil, ki konvergirata k a

A_8 ni odprta
 A_8 ni zaprta

• $A_9 = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$

notranjost: $\emptyset$
rob: $\{0, 1\}$

A_9 ni odprta
 A_9 ni zaprta

$(0, \infty)$ v prostoru $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, d_2)$

notranjost: $(0, \infty)$
rob: $\emptyset$

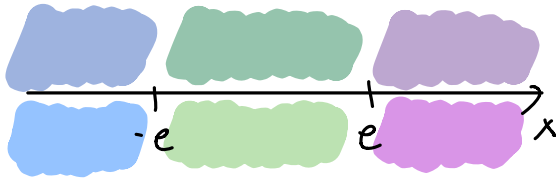
$\Rightarrow (0, \infty)$ je odprta množica
 $(0, \infty)$ je zaprta množica



7. Naj bo $a > e > 0$. V metriki d_1 skiciraj elipso z goriščem $F_1(e, 0)$ in $F_2(-e, 0)$ ter polosjo a .

Značba elipse $d_1(T, F_1) + d_2(T, F_2) = 2a$.

$$(|x-e| + |y|) + (|x+e| + |y|) = 2a$$



1.) $x \leq -e$

$$-x + (-x) + 2|y| = 2a$$

$$-2x + 2|y| = 2a$$

$$|y| = x + a$$

1.1.) $y = x + a$ za $y \geq 0$

1.2.) $y = -x - a$ za $y \leq 0$

2.) $-e \leq x \leq e$

$$-x + e + x + e + 2|y| = 2a$$

$$2e + 2|y| = 2a$$

$$|y| = a - e$$

2.1.) $y = a - e$ za $y \geq 0$

2.2.) $y = e - a$ za $y \leq 0$

3.) $x \geq e$

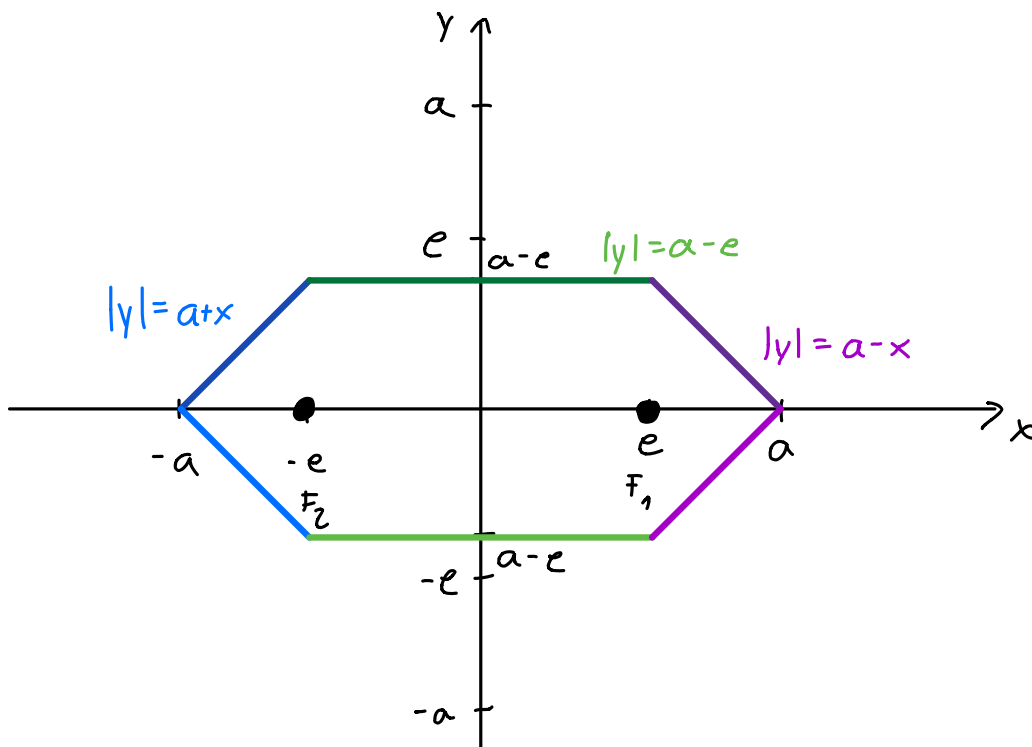
$$x - e + x + e + 2|y| = 2a$$

$$2x + 2|y| = 2a$$

$$|y| = a - x$$

3.1.) $y = a - x$ za $y \geq 0$

3.2.) $y = x - a$ za $y \leq 0$



$A \subset (\mathbb{N}, d)$ je omejena, če obstaja $a \in \mathbb{N}$ in $r > 0$, da je $A \subseteq K(a, r)$.

9. Dana je funkcija dveh spremenljivk:

$$d(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & ; m \neq n \\ 0 & ; m = n \end{cases}$$

- a) Dokazite, da je d metrika na množici naravnih števil.
 b) Je dobljeni metrični prostor omejen? Če je, kolikšen je njegov diameter?

a)

- $d(m, n) \geq 0$ ✓
- $d(m, n) = 0 \Rightarrow m = n$ ✓
 $m = n \Rightarrow d(m, n) = 0$ ✓
- $d(m, n) = d(n, m)$
- $\underline{d(m, p)} \leq \underline{d(m, n)} + \underline{d(n, p)}$
 - 1. $m = p$ ✓
 - 2. $m = n$ $d(m, p) = 0 + d(m, p)$ ✓
 - $n = p$: podobno
 - 3. vsi različni
 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$ ✓

b) $m \neq n \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Je omejen z diameterom $\frac{3}{2}$

ZVEZNOST PRESLIKAV

(M, d) , (M', d') metrična prostora

Preslikava $f: M \rightarrow M'$ je **ZVEZNA** v točki $a \in M$ glede na metriki d in d' , če za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$, da je:

$$f(K(a, \delta)) \subseteq K(f(a), \varepsilon)$$

$$\text{oz. za } \forall x \in M. \quad d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Preslikava $f: M \rightarrow M'$ glede na d in d' je **LIPSCHITZEVA** s konstanto g , če je

$$d'(f(x), f(y)) \leq g \cdot d(x, y) \quad \text{za } \forall x, y \in M.$$

LIPSCHITZEVA $\Rightarrow$ ZVEZNA ($\Leftarrow$ ne nujno velja $\emptyset$)

18. Naj bo $I: C[2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ preslikava, ki funkcijo f preslika v integral $\int_2^3 x^2 f(x) dx$. Če $C[2, 3]$ opremimo z metriko d_1 , $\mathbb{R}$ pa z običajno metriko, je preslikava I zvezna? Je Lipschitzeva?

$$I: C[2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I: f \mapsto \int_2^3 x^2 f(x) dx$$

$$d_1(f, g) = \int_2^3 |f(x) - g(x)| dx$$

$$d(I(f), I(g)) = |I(f) - I(g)| = \left| \int_2^3 x^2 f(x) dx - \int_2^3 x^2 g(x) dx \right| =$$

$$= \left| \int_2^3 x^2 (f(x) - g(x)) dx \right| \leq \int_2^3 |x^2 (f(x) - g(x))| dx =$$

$$= \int_2^3 |x^2| \cdot |f(x) - g(x)| dx \leq \int_2^3 \underset{\substack{\uparrow \\ x \in [2, 3]}}{9} \cdot |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= 9 \cdot \int_2^3 |f(x) - g(x)| dx = 9 \cdot d_1(f, g)$$

$\Rightarrow I$ je Lipschitzeva s konstanto 9

$\Rightarrow I$ je zvezna

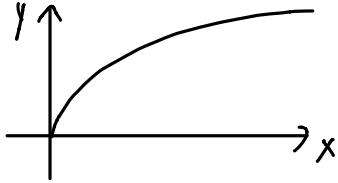
17. Je preslikava $f(x) = \sqrt{x}$ zvezna in ali je Lipschitzeva:

a) kot preslikava iz $[0, \infty)$ v $[0, \infty)$?

b) kot preslikava iz $[1, \infty)$ v $[1, \infty)$?

Povsod jemljemo običajno metriko.

$$f(x) = \sqrt{x}$$



je zvezna na $[0, \infty)$ $\Rightarrow$ je zvezna tudi na $[1, \infty)$

Torej moramo preveriti ali je Lipschitzeva

a) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

Ali obstaja tak q , da velja $d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$ za $\forall x, y \in [0, \infty)$?

BŠS: $x \geq y$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq q \cdot (x - y) \quad ?$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \leq q \quad ?$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{y}}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leq q \quad ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq q \quad ? \quad \text{za } \forall x, y \in [0, \infty) \\ x \neq y$$

"motivo" nas ulednosti, manjše od 1:

$y=0$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq q$? za katerikoli q lahko najdemo dovolj majhen x (dovolj blizu 0), da je $\frac{1}{\sqrt{x}} > q$ $\neq$

b) $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$: BŠS: $x \geq y$ vemo: $x \geq 1, y \geq 1$

1.možnost: $d(f(x), f(y)) = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{t} \Big|_t=y^x = \int_y^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{2} \int_y^x 1 dt = \frac{1}{2} (x - y) = \frac{1}{2} d(x, y)$
 $\uparrow$
 $x, y \geq 1$

$\Rightarrow$ Lipschitzeva s konstanto $\frac{1}{2}$

2.možnost: $\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$
 $\uparrow$
 $x, y \geq 1$

$\Rightarrow$ Lipschitzeva s konstanto $\frac{1}{2}$

ŽAPOREDJA U METRIČNIH PROSTORIH

Žaporedje $x_1, x_2, x_3, \dots$ u metričnom prostoru (M, d) je KONVERGENTNO, če $\exists a \in M$, da za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(x_n, a) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow a$ je limita žaporedja

Žaporedje $x_1, x_2, x_3, \dots$ u metričnom prostoru (M, d) je CAUCHYJEVO, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \geq n_0$ velja $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

KONVERGENTNO $\Rightarrow$ CAUCHYJEVO

Metrični prostor je POLN, če je usako cauchyjevo žaporedje tudi konvergentno

(U): Naj bo $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \dots$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$.

$$x_n = (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n)$$

Ali je x_n konvergentno u evklidski metriki?

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ ali obstaja?

$$\begin{aligned} a &= (1, 0) \\ \nearrow \quad \nwarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \varphi_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \varphi_n &= 1 \end{aligned}$$

dokažimo, da je a limita

$$\begin{aligned} d_2(x_n, a) &= d_2((\cos \varphi_n, \sin \varphi_n), (1, 0)) = \sqrt{(\cos \varphi_n - 1)^2 + (\sin \varphi_n - 0)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi_n - 2\cos \varphi_n + 1 + \sin^2 \varphi_n} = \sqrt{2 - 2\cos \varphi_n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \varphi_n} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(2 \cdot \frac{\varphi_n}{2})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi_n}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_n}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \sin^2 \frac{\varphi_n}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_n}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left| \sin \frac{\varphi_n}{2} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\downarrow \\ \varphi_n \rightarrow 0 \\ \frac{\varphi_n}{2} \rightarrow 0}} 0 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(x_n, a) = 0 \Rightarrow x_n$ je konvergentno s limito (1, 0)

$$(b): d(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & ; m \neq n \\ 0 & ; m = n \end{cases}$$

a) d je metrika na $\mathbb{N}$ SHO ŽE

b) omejen prostor SHO ŽE

c) ali je zaporedje $1, 2, 3, \dots$ v tej metriki konvergentno?

predpostavimo, da je a limita

$$\Rightarrow d(n,a) = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a}$$

↑
za $n \neq a$

Ali za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $d(n,a) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$.

" $\forall$ "
" $\frac{1}{a}$ "

$$d(n,a) \geq \frac{1}{a} \geq \varepsilon$$

← ali lahko najdemo takšen ε ?

(zotem $d(n,a) \neq \varepsilon$)

Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{a}$

$$d(n,a) \geq \frac{1}{a} \Rightarrow d(n,a) \neq \frac{1}{a} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ zaporedje $1, 2, 3, \dots$ NI KONVERGENTNO

1) Ali je $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2n^2-1}{n^2+1})$ konvergentno v $(\mathbb{R}^2, d_2)$?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = 2 \end{array} \right\} \text{trdimo, da je } \alpha = (0, 2) \text{ limita } \Rightarrow x_n \text{ konvergentno}$$

za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$. $d(x_n, \alpha) < \varepsilon$ za $\forall n \geq n_0$

$$d_2(x_n, \alpha) = d_2(x_n, (0, 2)) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(2 - \frac{2n^2-1}{n^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2n^2+2-2n^2+1}{n^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{9}{(n^2+1)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow x_n$ konvergentno z limito $(0, 2)$.

2) $y_n = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}, \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n-1}, \frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}} \right)$

Ali konverira v $(\mathbb{R}^3, d_2)$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \cdot \frac{1:n}{1:n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}}_{e}^{\frac{(n-1) \cdot 2}{2n+1}} = e^1 = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}} \cdot \frac{1:n}{1:n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

sklepamo, da je $\alpha = (2, e, \frac{3}{2})$ limita

$$\text{Preverimo: } d_2(x_n, \alpha) = \sqrt{\underbrace{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} - 2\right)^2}_{\downarrow n \rightarrow \infty 0} + \underbrace{\left(\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n-1} - e\right)^2}_{\downarrow n \rightarrow \infty 0} + \underbrace{\left(\frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}} - \frac{3}{2}\right)^2}_{\downarrow n \rightarrow \infty 0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Naloga: Določite, katera od funkcij $f_a(x) = ax$ je najbližja funkciji $f(x) = x^2 - 1$ v metriki $d_2(g, h) = \left(\int_0^1 (g(x) - h(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Definiramo funkcijo } G(a) &:= d_2(f_a(x), f(x)) = \\ &= \left(\int_0^1 ((x^2 - 1) - ax)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_0^1 (x^2 - ax - 1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ker je f_x naraščajoča funkcija, je minimum funkcije $G(a)$ enak minimumu funkcije

$$F(a) = \int_0^1 (x^2 - ax - 1)^2 dx$$

Izračunamo odvod: (brez dokazovanja, da to lahko naredimo)

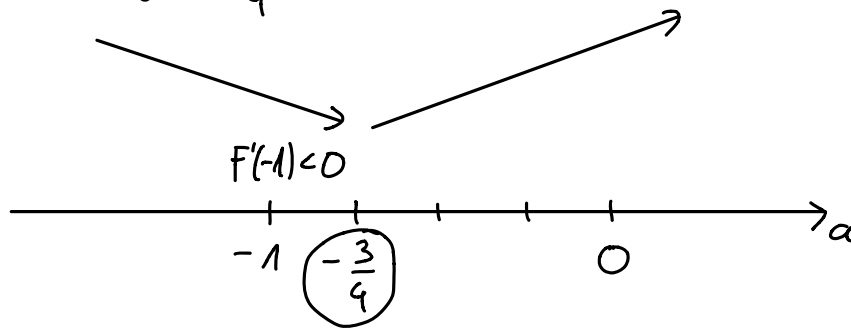
$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} (x^2 - ax - 1)^2 dx + 0 - 0 = \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \nwarrow \\ v(a)=1 & v(a)=0 \\ v'(a)=0 & v'(a)=0 \end{matrix} \\ &= \int_0^1 2 \cdot (x^2 - ax - 1) \cdot (-x) dx = \\ &= -2 \cdot \int_0^1 (x^3 - ax^2 - x) dx = \\ &= -2 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - a \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - a \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 + a \cdot 0 + 0 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} + a \cdot \frac{2}{3} + 1 \end{aligned}$$

$$F'(a) = 0 \quad (\text{potreben pogoj za nastop ekstrema})$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2a}{3} + 1 = 0$$

$$\frac{2a}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{3}{4}$$



$$F'(-1) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow F \text{ pada}$$

$$F'(0) = -\frac{1}{2} + 0 + 1 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow F \text{ narašča}$$

$\Rightarrow \forall a = -\frac{3}{4}$ F res doseže minimum.

Iskana funkcija je tako funkcija $f_{-\frac{3}{4}}(x) = -\frac{3}{4}x$.