

Analiza 3 — 4. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 4. predavanja

V tem predavanju bomo spoznali pojem prvega integrala diferencialne enačbe ter si ogledali parametričen pristop k reševanju enačb.

- 1 Prvi integrali diferencialne enačbe, primeri
- 2 Gradient prvega integrala je pravokoten na rešitve
- 3 Pfaffova enačba v ravnini
- 4 Iskanje prvega integrala
- 5 Lagrangejev multiplikator
- 6 Parametrično reševanje diferencialnih enačb
- 7 Lagrange-d'Alembertova enačba
- 8 Clairautova enačba

Prvi integrali diferencialne enačbe

V dosedanjih primerih smo opazili, da rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, kjer je f zvezno parcialno odvedljiva funkcija na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, sestavljajo enoparametrično družino rešitev $y = y(x, C)$ v odvisnosti od konstante C . Grafi $(x, f(x, C))$ teh rešitev so paroma disjunktne krivulje v D .

V naslednjem poglavju bomo videli, da lokalno to vselej velja in je posledica izreka o obstoju in enoličnosti rešitev začetnega problema. Globalno to ne velja nujno: množice vseh rešitev v splošnem ni mogoče bijektivno parametrizirati z nekim intervalom v $\mathbb{R}$.

Pogosto lahko (vsaj lokalno) iz enačbe $y = y(x, C)$ izrazimo C in dobimo

$$C = u(x, y).$$

Funkcija u ima torej konstantno vrednost vzdolž grafa $(x, y(x))$ vsake rešitve dane diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$.

Vsaka funkcija s to lastnostjo se imenuje **prvi integral** ali **primitivna funkcija** diferencialne enačbe.

Primeri prvih integralov

Primer

Enačba $y' = f(x)$ ima rešitve $y = y(x, C) = h(x) + C$, kjer je $h' = f$, in je

$$C = y - h(x) = u(x, y)$$

njen prvi integral.

Primer

Linearna enačba $y' + a(x)y = 0$ ima družino rešitev

$$y = y(x, C) = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Njen prvi integral je torej

$$C = u(x, y) = ye^{\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Diskusija

Prvi integral seveda ni enolično določen. Na primer, če je $u(x, y)$ nek prvi integral dane diferencialne enačbe, je tudi funkcija $h(u(x, y))$ njen prvi integral za poljubno funkcijo h , definirano na zalogi vrednosti funkcije u .

V optimalnem primeru je u prvi integral z lastnostjo $u_y(x, y) \neq 0$ na D . Izrek o implicitni funkciji tedaj pove, da je vsaka nivojnica

$$\Gamma_C = \{(x, y) \in D : u(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

unija največ števno mnogo grafov $y = h_j(x)$ nad paroma disjunktными intervali $x \in I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. Ko se $x \in I_j$ približuje krajišču intervala I_j , se točka $(x, h_j(x))$ približuje robu domene D ali pa gre proti ∞ (to bomo dokazali).

Ker je u prvi integral enačbe $y' = f(x, y)$, ima konstantno vrednost na vsaki rešitvi. Zato so $y(x) = h_j(x)$ ($x \in I_j$) ravno rešitve te enačbe, na katerih ima u vrednost C . Ko se C spreminja, se tudi število teh intervalov (in s tem število rešitev) lahko spreminja, kar smo že opazili na primerih v 1. predavanju.

Prvi integral s to lastnostjo se imenuje **primitiven prvi integral**. Obstoj takega integrala torej prevede problem reševanja diferencialne enačbe v načeloma preprostejši problem reševanja algebraične enačbe.

Gradient prvega integrala je pravokoten na rešitve

Če je funkcija $u(x, y)$ konstantna vzdolž neke krivulje $y = y(x)$, dobimo z odvajanjem enačbe $u(x, y(x)) = c$ identiteto

$$u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x))y'(x) = 0.$$

Torej je $y(x)$ rešitev diferencialne enačbe

$$u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = 0 \iff u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy = 0.$$

Spomnimo se, da je $\nabla u = (u_x, u_y)$ vektorsko polje na $D \subset \mathbb{R}^2$, ki se imenuje **gradient** skalarne polja $u(x, y)$.

Zgornja enačba pomeni, da je gradient ∇u prvega integrala v vsaki točki pravokoten na smerni vektor krivulje $x \mapsto (x, y(x))$, to je vektor $(1, y'(x))$.

To idejo lahko posplošimo z uporabo vektorskih polj.

Pfaffova enačba v ravnini

Označimo z $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ in $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ standardno bazo ravnine $\mathbb{R}^2$. Vsako vektorsko polje

$$\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = P\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2$$

na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ določa **Pfaffovo diferencialno enačbo**

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \iff P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Tu je $\mathbf{r} = (x, y)$ in $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Rešitve te enačbe na množici $\mathbf{F} \neq 0$ so krivulje, ki so v vsaki točki pravokotne na vektorsko polje $\mathbf{F}$.

Točka (x_0, y_0) se imenuje **regularna točka** enačbe, če je $\mathbf{F}(x_0, y_0) \neq 0$, in **singularna točka**, če je $\mathbf{F}(x_0, y_0) = 0$.

Obnašanje rešitev v okolici singularnih točk je lahko zelo zapleteno, medtem ko v okolici regularne točke (x_0, y_0) lahko enačbo izrazimo v eni od oblik

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \text{ali} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

odvisno od tega, katera od obeh komponent P, Q vektorskega polja $\mathbf{F}$ je v točki (x_0, y_0) različna od nič.

Iskanje prvega integrala

Vsako diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ lahko zapišemo v obliki

$$-f(x, y)dx + dy = 0.$$

To je Pfaffova enačba s pripadajočim vektorskim poljem $\mathbf{F} = (-f(x, y), 1)$.

Zanima nas, kako bi za dano enačbo

$$Pdx + Qdy = 0$$

našli netrivialen prvi integral.

Najpreprostejši primer je, ko je vektorsko polje $\mathbf{F} = (P, Q)$ potencialno, torej $\mathbf{F} = \nabla u$, saj je tedaj

$$0 = Pdx + Qdy = u_x dx + u_y dy = du$$

in je u prvi integral enačbe. Na vsaki enostavno povezani domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ je polje $\mathbf{F} = (P, Q)$ potencialno natanko tedaj, ko je

$$P_y = Q_x.$$

V tem primeru najdemo potencial u polja $\mathbf{F}$ z integracijo (predmet Analiza 2).

Integracija na pravokotniku $D \subset \mathbb{R}^2$

Izberemo točko $(x_0, y_0) \in D$. Diferencialno 1-formo $\alpha = Pdx + Qdy$ integriramo od (x_0, y_0) do variabilne točke $(x, y) \in D$ tako, da najprej integriramo po daljici v x smeri, nato pa še v y smeri:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds.$$

Za fiksen x je očitno

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Isto funkcijo lahko zapišemo tudi v obliki

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + \int_{x_0}^x P(t, y) dt.$$

Razlika obeh integralov je namreč integral forme α po robu pravokotnika A s krajišči (x_0, y_0) , (x, y_0) , (x, y) , (x_0, y) , kar je po Greenovi formuli enako integralu $\int_A (Q_x - P_y) dx dy = 0$. Z odvajanjem zadnje formule po x dobimo

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Torej je $\nabla u = \mathbf{F}$.

Lagrangejev multiplikator

To je seveda zelo izjemna situacija.

V splošnem lahko poskušamo najti prvi integral tako, da enačbo pomnožimo z nekim primerno izbranim faktorjem $\mu(x, y) > 0$:

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0.$$

To seveda ne spremeni množice rešitev enačbe. Novo vektorsko polje $\mu \mathbf{F} = (\mu P, \mu Q)$ je lokalno potenciano, če izpolnjuje pogoj

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

oziroma

$$Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x).$$

To je parcialna diferencialna enačba prvega reda za funkcijo μ , katere reševanje je načeloma težja naloga od reševanja navadnih diferencialnih enačb. Ta metoda zato v praksi ni zelo uporabna. Včasih pa nam uspe najti rešitev na preprost način (glej primere v Križanič, str. 47–48).

Nekaj primerov multiplikatorjev

Primer 1.

$$ydx - xdy = 0, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Primer 2.

$$ydx - xdy = 0, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2(1 + (x/y)^2)} = \frac{d(x/y)}{1 + (x/y)^2} = d \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Primer 3.

$$2 \sin y \, dx + x \cos y \, dy = 0, \quad \mu = x,$$

$$2x \sin y \, dx + x^2 \cos y \, dy = d\left(x^2 \sin y\right).$$

Parametrično reševanje diferencialnih enačb

Rešiti želimo implicitno podano enačbo

$$F(x, y, y') = 0.$$

Pogosto lahko problem poenostavimo tako, da izrazimo vse tri spremenljivke x, y, y' kot funkcije dveh parametrov u, v :

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Odtod sledi

$$dx = \phi_u du + \phi_v dv, \quad dy = \psi_u du + \psi_v dv.$$

Te izraze vstavimo v identiteto $dy = y' dx$ in dobimo

$$\psi_u du + \psi_v dv = \chi(u, v)(\phi_u du + \phi_v dv)$$

$$(\psi_u - \chi\phi_u) du + (\psi_v - \chi\phi_v) dv = 0.$$

To je diferencialna enačba za $v = v(u)$ (ali $u = u(v)$), kakršne smo ravnokar obravnavali. Če je $v(u, C)$ njena splošna rešitev, potem je

$$x = \phi(u, v(u, C)), \quad y = \psi(u, v(u, C))$$

parametrično izražena rešitev prvotne enačbe.

Primer parametričnega reševanja

Oglejmo si enačbo

$$y = x \left(y' + \sqrt{1 + y'^2} \right).$$

Če jo izrazimo s pomočjo spremenljivk x in $p = y'$, imamo zvezi

$$y = x \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) \quad \text{in} \quad dy = p dx.$$

Izrazimo dy iz leve enačbe in vstavimo v desno:

$$dy = \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) dx + x \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp = p dx$$

$$\sqrt{1 + p^2} dx + x \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp = 0.$$

Zaključek primera

To je enačba z ločljivima spremenljivkama:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{pdp}{1+p^2} = 0$$

Z integracijo dobimo

$$\log |x| + \log \left(p + \sqrt{1+p^2} \right) + \log \sqrt{1+p^2} = c$$

$$x \left(p + \sqrt{1+p^2} \right) \sqrt{1+p^2} = C = \pm e^c$$

$$y = x \left(p + \sqrt{1+p^2} \right) \implies y \sqrt{1+p^2} = C.$$

To je družina rešitev $x = x(p, C)$, $y = y(p, C)$ v odvisnosti od parametra p .
Z eliminacijo parametra p iz zgornjih dveh enačb sledi zveza (preveri!)

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 \iff (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

To je družina krogov s središči $(C, 0)$ in polmeri $|C|$.

Lagrange-d'Alembertova enačba

Giuseppe Ludovico Lagrangia, 1736; † Joseph-Louis de Lagrange, 1813
Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783

$$y = x\phi(y') + \psi(y').$$

Prejšnji primer je enačba te vrste. Za parametra izberemo x in $p = y'$. Tedaj

$$y = x\phi(p) + \psi(p), \quad dy = y'dx = p dx.$$

Odtod:

$$p dx = dy = \phi(p) dx + x\phi'(p) dp + \psi'(p) dp,$$

$$(\phi(p) - p) dx + (x\phi'(p) + \psi'(p)) dp = 0.$$

Kjer je $\phi(p) - p \neq 0$, je to linearna diferencialna enačba za $x = x(p, C)$ v odvisnosti od p . Rešitev vstavimo v osnovno enačbo

$$y(p, C) = x(p, C)\phi(p) + \psi(p)$$

in dobimo parametrično izraženo splošno rešitev Lagrangeve enačbe.

Za vsako rešitev $p_0 \in \mathbb{R}$ enačbe $\phi(p) - p = 0$ dobimo še rešitev

$$y = p_0 x + \psi(p_0), \quad y' = p_0.$$

Clairautova enačba (Alexis Claude Clairaut, 1713–1765)

Clairautova enačba

$$y = xy' + \psi(y')$$

je poseben primer Lagrangejeve enačbe, pri kateri je $\phi(y') \equiv y'$.

Postopamo enako kot prej in dobimo razcepno enačbo

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Če je $dp = 0$, je p konstanta in $y = px + \psi(p)$; to je ena družina rešitev.

Drugo rešitev dobimo iz

$$x + \psi'(p) = 0.$$

To je nediferencialna enačba za $p = p(x)$. Rešitev obstaja lokalno v okolici vsake točke p_0 , kjer je $\psi''(p_0) \neq 0$. Ker velja tudi $y = px + \psi(p)$, dobimo s tem še eno rešitev $y(x) = p(x)x + \psi(p(x))$ Clairautove enačbe.

Primer $\psi''(p) \equiv 0$ implicira $\psi'(p) = \text{konstanta}$, torej je x konstanta. Zato ta primer ne da nobene dodatne rešitve.

Primer Clairautove enačbe

$$y = xy' + y'^2.$$

Naj bo $p = y'$, torej je $y = xp + p^2$. Upoštevaje $dy = p dx$ dobimo enačbo

$$p dx = dy = d(xp + p^2) = p dx + x dp + 2p dp,$$

$$(x + 2p) dp = 0$$

s splošno rešitvijo $dp = 0$, $p = C \in \mathbb{R}$,

$$y = Cx + C^2.$$

Enačba $x + 2p = 0$, $p = -x/2$ prispeva še rešitev

$$y = xp + p^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}.$$