

Funkcijas - mēroģiemu 6

Ciklometriskā funkcija: $\arctg(x)$ un $\operatorname{arccotg}(x)$

Opmē: Pā mēroģiemu standarta pāņem

$\tan(x)$ $\cotan(x)$
 $\arctan(x)$ $\operatorname{arccot}(x)$?

Definīcija: Ciklometriskā funkcija

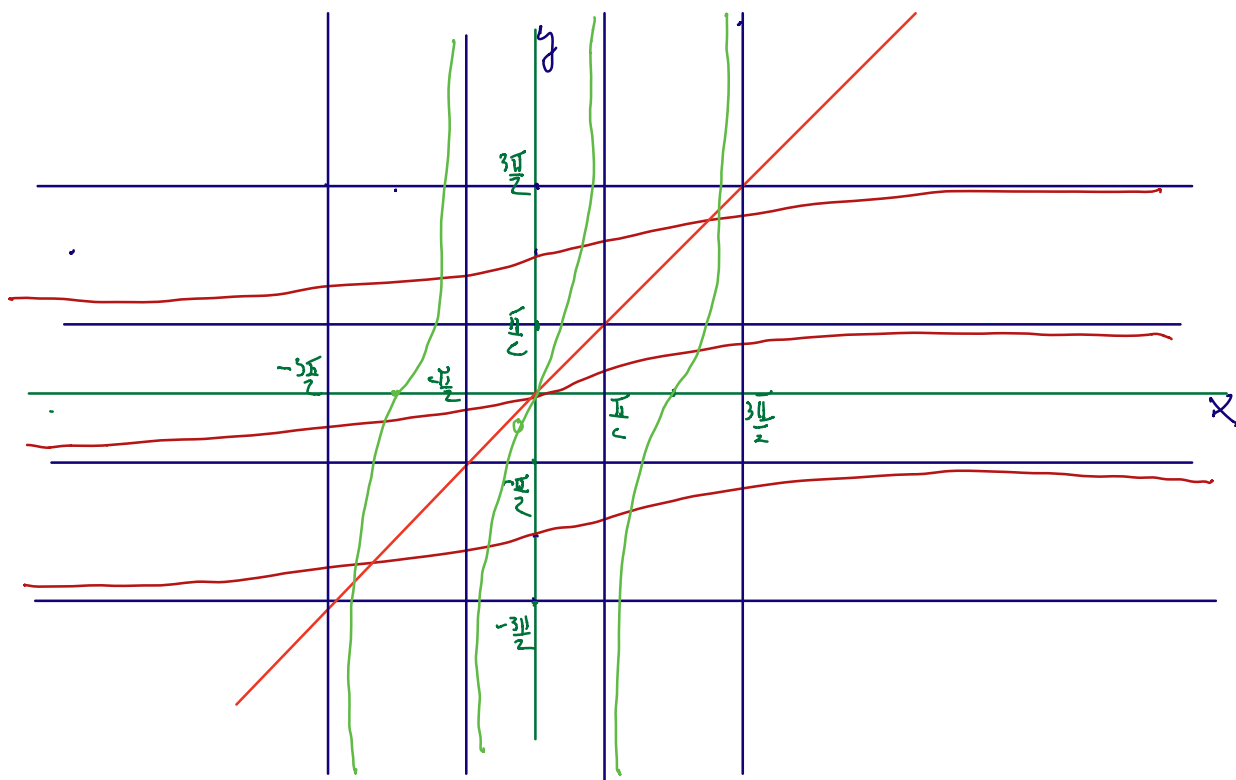
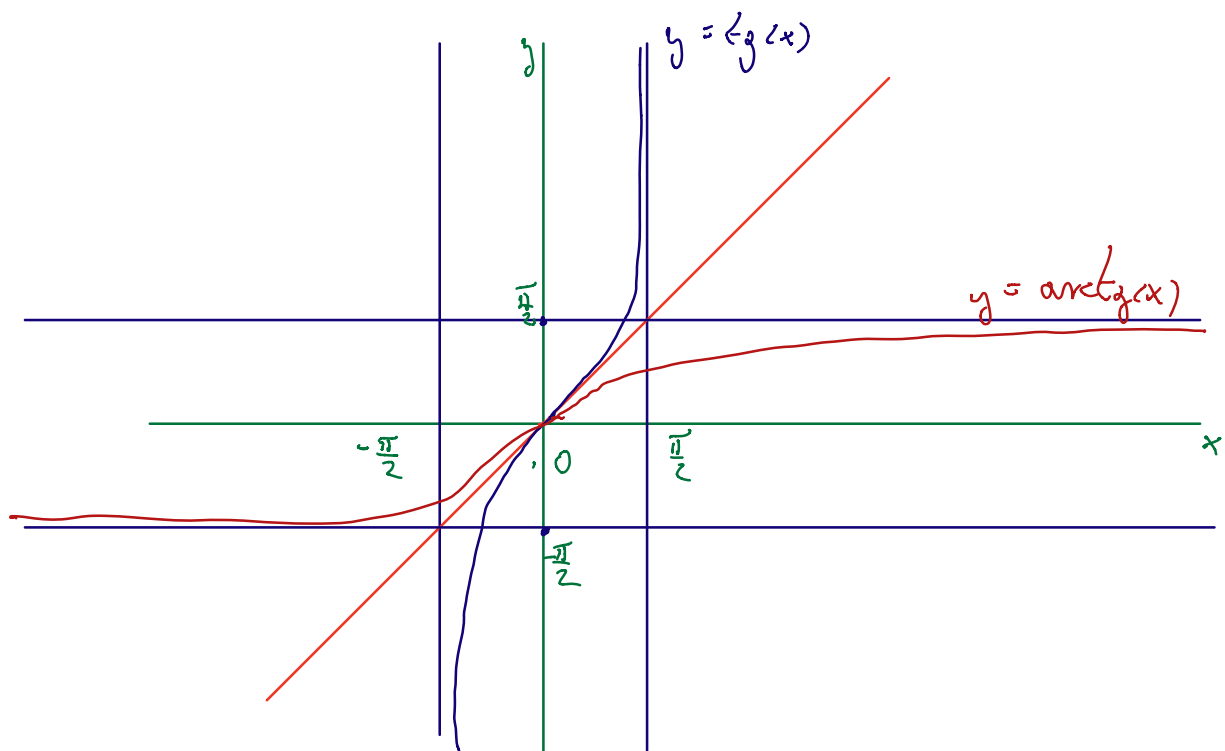
$$\arctg: \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

j' inversā funkcija funkcija

$$\operatorname{ctg}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Tas j: $\arctg(x) = y \iff \operatorname{ctg}(y) = x$

un $\forall x \in \mathbb{R}$.



Definicija: Funkcija

$$\arctg : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi]$$

je inverzna funkcija funkciji

$$\tg : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Torej:

$$\arctg(x) = y \iff \tg(y) = x.$$

D.N. Narišite graf funkcije $\arctg(x)$.

(glavna veja in dodatne veje.)

Eksponentna in logaritemska funkcija

Definicija: Maj $a \in \mathbb{R}^+$. Eksponentna funkcija

z osnovo a je funkcija, podana s predpisom

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

Ważne a^x już potrzebne zdefiniować. To możemy zrobić
postępując:

1. $x \in \mathbb{N}$ $x = n$

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Definiujemy:

$$a^0 = 1$$

oraz

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Ważne: $a^n \cdot a^{-n} = a^0$

2. $x \in \mathbb{Q}$

$$x = \frac{p}{q}$$

Najpierw definiujemy $a^{\frac{1}{2}}$ s. podpisem

$$a^{\frac{1}{2}} = z \Leftrightarrow z^2 = a$$

Arzko definiramo $a^{\frac{p}{2}}$ s prepisom

$$a^{\frac{p}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^p = (\sqrt{a})^p$$

Nij bo realij $x \in \mathbb{R}$ pafinno realno števil. Nij

bo $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$

zaporedji racionalnih števil, ki karko refz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x.$$

Polem moro refzti:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\xi_n} \quad *$$

Torej:

$$a^{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\xi_n} \quad *$$

Opomba: Pokazati ji treba, da je zaporedje definicije

dobro. To pomeni: Za vsako zaporedje $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

ki karko refz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = x$$

je veslošt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$,

To lahko dokazati lahko.

Naziv funkcije $a^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

je bolj definiran.

Pomembne osnove:

$$a = 2, a = 10, a = e$$

Najpomembnejša relacija, ki jo združuje eksponentna funkcija:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

To relacija je za eksponentno funkcijo **karakteristična**.

To pomeni: Če za neko **zvezo** funkcijo $f(x)$ velja

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2),$$

potem je

$$f(x) = a^x$$

iz meli $a \in \mathbb{R}^+$.

Dokazimo karakteristično lastnost.

Najprej naj bosta x_1 in x_2 narabi števila m_1 in m_2

Tudi smo:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1 + m_2} \quad *$$

Res:

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_1} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_2} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_1 + m_2} = a^{m_1 + m_2}$$

Sami se lahko prepričate, da $*$ velja tudi iz poglobljen
pre celih števil.

$$a^{m_1} \cdot a^{-m_2} = \underbrace{a \cdots a}_{m_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{m_2} = \underbrace{a \cdots a}_{m_1 - m_2}$$

Nj hokje evoj $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$ in $x_2 = \frac{p_2}{q_2}$ racionalni števili.

$$a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}}$$

Dijelimo z:

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} &= a^{p_1 q_2} \cdot a^{p_2 q_1} = \\ &= a^{p_1 q_2 + p_2 q_1} \end{aligned}$$

$$\left[\left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} \right]^{\frac{1}{q_1 q_2}} = \left(a^{p_1 q_2 + p_2 q_1} \right)^{\frac{1}{q_1 q_2}}$$

$$\left(a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} \right)^{q_1 q_2} \frac{1}{q_1 q_2} = a^{\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}}$$

$$= a^{\frac{p_1}{q_1}} \cdot a^{\frac{p_2}{q_2}} = a^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}$$

Relacija * je kraj delovanja in pošten par racionalnih števil.

Že pokažemo pravilnost izjav x_1 in x_2 po
relaciji relz zaradi izjaviti ot. po definiciji *.

Res: Naj bosta $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

zaporedji, ki katera relz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_2.$$

Potem imamo:

$$\underline{\underline{x_1 \cdot x_2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad *$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =$$

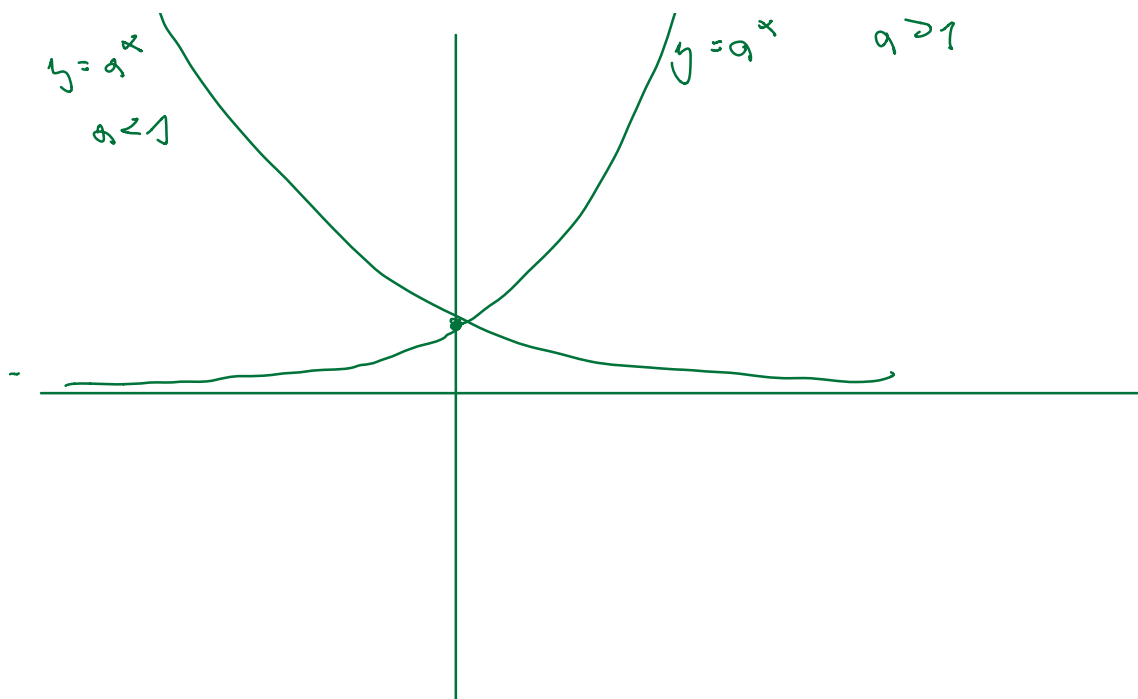
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot b_n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + b_n \quad *$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) =$$

$$= \underline{\underline{x_1 + x_2}}$$

□.



Logaritmusok funkciója

Definíció Logaritmusok funkciója

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

z oszlo a ; $a \in \mathbb{R}^+$ je *inverz* funkciója
elsoentne funkció a^x . T. r. j:

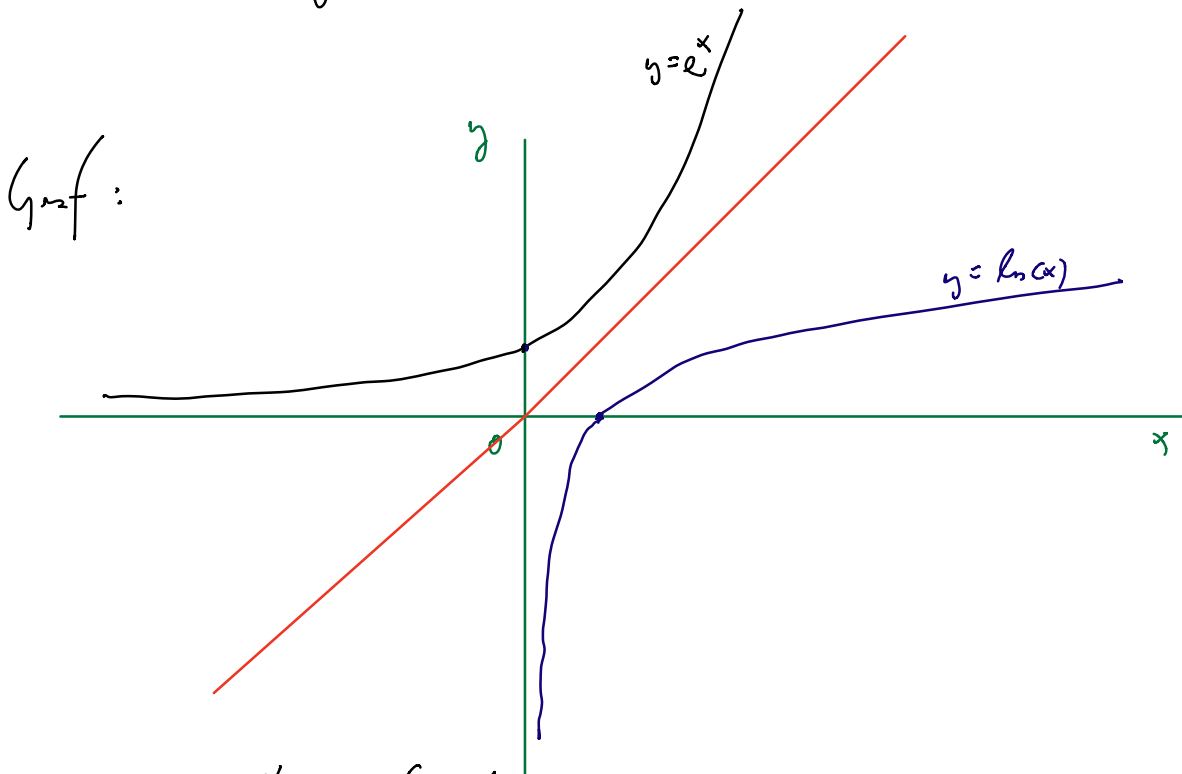
$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Primer: $\log_{10} 1000 = 3$, s.j. je $10^3 = 1000$

$$\log_2 32 = 5, \text{ s.j. je } 2^5 = 32.$$

Opomba: e je osnovna $a = e$ (Eulerjevo število),
pisemo:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$



D.v. Narišite graf $f(x) = \log_a(x)$; $0 < a < 1$.

Log może być też potęgą:

$$\log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3$$

$$\log_{10}(10.000) = \log_{10}(10^4) = 4$$

Karakterystyczną właściwością logarytmu jest:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$$