

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

19. predavanje: Izoperimetrični problemi

Problem je naslednji. Na prostoru funkcij $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ (ali splošneje $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$) imamo končno mnogo (v splošnem nelinearnih) funkcionalov Lagrangejevega tipa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt \\ \mathcal{U}_j(x) &= \int_a^b U^j(t, x, \dot{x}) dt, \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Poiskati želimo funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$, ki zadoščajo pogojem

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m$$

ter robnim pogojem na krajiščih a, b intervala, pri katerih $\mathcal{L}(x)$ doseže ekstremno vrednost.

Gre torej za iskanje **vezanega ekstrema** funkcionala $\mathcal{L}$ pri vezeh $\mathcal{U}_j(x) = c_j$ za $j = 1, \dots, m$.

Motivacija: vezani ekstremini v končni dimenziji

Če spremenljivka x ni funkcija, ampak vektor v $\mathbb{R}^n$ (kar je isto kot funkcija na n točkah), smo način reševanja spoznali pri Analizi 2. Recimo, da so funkcije $\mathcal{U}_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) zvezno diferenciable na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in so v neki točki $x^0 \in D$ njihovi gradienti $\nabla \mathcal{U}_j(x^0) \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, m$) linearno neodvisni (torej je $m \leq n$). Tedaj je po izreku o implicitni funkciji v neki okolici $U \subset \mathbb{R}^n$ točke x^0 množica

$$M = \{x \in U : \mathcal{U}_j(x) = \mathcal{U}_j(x^0), \quad j = 1, \dots, m\}$$

ploskev (podmnogoterost) dimenzije $n - m$ in kodimenzije m .

Funkcija $\mathcal{L}|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ ima v x^0 stacionarno točko natanko tedaj, ko je ortogonalna projekcija gradienta $\nabla \mathcal{L}(x^0)$ na podprostor

$$\Sigma = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \nabla_v \mathcal{U}_j(x^0) = \nabla \mathcal{U}_j(x^0) \cdot v = 0, \quad j = 1, \dots, m \right\} = T_{x^0} M$$

enaka 0. To pa je res natanko tedaj, ko je

$$\nabla \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \mathcal{U}_j(x^0)$$

za neka števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (Lagrangejevi multiplikatorji).

Primer 1: izoperimetrični problem

Podobna logika velja v neskončno razsežnih vektorskih prostorih. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

Primer 1. V zgornji polravnini si izberemo točki

$$T_0(a, A), \quad T_1(b, B), \quad a < b, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Iščemo funkcijo $y = y(x)$ na $[a, b]$, ki zadošča robnima pogoju $y(a) = A$, $y(b) = B$, tako da je dolžina grafa predpisana:

$$\ell(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx = c > 0$$

in je ploščina pod grafom maksimalna ali minimalna:

$$\mathcal{A}(y) = \int_a^b y(x) \, dx \quad \text{maksimalna/minimalna.}$$

Seveda moramo privzeti, da je $\ell(y) \geq \text{dist}(T_0, T_1)$.

Pristop k reševanju

Denimo, da je

$$y_s(x) = y(x, s) = y(x) + sv(x) + o(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \quad y_s(a) = A, \quad y_s(b) = B$$

neka deformacija začetne funkcije $y = y_0$, ki zadošča pogoju

$$\ell(y_s) = \int_a^b \sqrt{1 + y_s'(x)^2} dx = c > 0 \quad \text{za vsak } s.$$

Variacija $v(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} y_s(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$ zadošča $v(a) = v(b) = 0$. Velja:

$$0 = \nabla_v \ell(y) = \int_a^b \frac{y'(x)v'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) v(x) dx$$

Sklep: če ima pri funkciji $y = y(x)$ ploščina $\mathcal{A}(y)$ lokalni ekstrem (pri veznem pogoju $\ell(y) = c$), potem za vse dopustne variacije v , ki zadoščajo

$\nabla_v \ell(y) = 0$, velja

$$\nabla_v \mathcal{A}(y) = \int_a^b v(x) dx = 0.$$

Ključni sklep

Pri fiksnem $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ sta preslikavi

$$v \mapsto \nabla_v \ell(y), \quad v \mapsto \nabla_v \mathcal{A}(y)$$

linearna funkcionala na vektorskem prostoru

$$V = \{v \in \mathcal{C}([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

Oba funkcionala sta podana z integracijo glede na neko zvezno funkcijo na $[a, b]$. Dobljeni pogoj pove, da je jedro prvega funkcionala vsebovano v jedru drugega funkcionala. Odtod sledi, da je drugi funkcional konstantni večkratnik prvega. Zato obstaja konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ (**Lagrangejev multiplikator**), tako da je

$$\int_a^b \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) \right) v(x) dx = 0 \quad \text{za vsak } v \in V.$$

Odtod sledi

$$1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 0$$

$$x + \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1 \in \mathbb{R}$$

Rešitev

Enačbo

$$x + \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1$$

rešimo parametrično:

$$\begin{aligned}y' &= \tan u \\1/\sqrt{1 + y'^2} &= 1/\sqrt{1 + \tan^2 u} = \cos u \\x &= C_1 - \lambda \tan u \cos u = C_1 - \lambda \sin u \\dx &= -\lambda \cos u \, du \\dy &= y' dx = \tan u (-\lambda \cos u \, du) = -\lambda \sin u \, du \\y &= C_2 + \lambda \cos u\end{aligned}$$

Odtod sledi

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = \lambda^2.$$

Rešitve, ki podajajo ekstremne vrednosti, so torej krožnice.

Na voljo imamo tri proste konstante λ , C_1 , C_2 , s katerimi lahko načeloma zadostimo robnima pogoju ter pogoju o dolžini krivulje.

Primer 2

Iščemo krivuljo predpisane dolžine $l > 0$ v zgornji polravnini $y \geq 0$ s krajiščema na x -osi, ki z osjo x oklepa največjo ploščino. Krajišči pri tem nista predpisani. Rešitve moramo seveda izbirati iz zgornje družine krožnic. Problem je, da ni vnaprej jasno, katera izmed njih bo prava, ker nismo predpisali robnih točk in niti ne vemo, na katerem x -intervalu naj bi problem študirali.

Tovrsten problem lažje in naravneje formuliramo s pomočjo parametričnega zapisa $(x(t), y(t))$ iskane krivulje na intervalu $t \in [0, 1]$, kjer je $y(t) \geq 0$. Ker je problem očitno invarianten za translacije v smeri osi x , lahko vzamemo, da je

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

medtem ko vrednosti $x(1)$ ne predpišemo. Ploščina med krivuljo in osjo x je enaka

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt,$$

dolžina krivulje pa je

$$\ell(x, y) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = l.$$

Iščemo torej maximum funkcionala $\mathcal{A}(x, y)$ pri pogoju $\ell(x, y) = l$.

Euler-Lagrangejev sistem

Dopustne variacije so $\mathcal{C}^1$ funkcije $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ na $[0, 1]$, ki zadoščajo robnim pogojem

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2(1) = 0.$$

Isti sklep kot prej pokaže, da sta pri iskani funkciji $(x(t), y(t))$ linearna funkcionala

$$v \mapsto \nabla_v \ell(x, y), \quad v \mapsto \nabla_v \mathcal{A}(x, y)$$

linearno odvisna, torej obstaja število $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da je

$$\nabla_v (\mathcal{A}(x, y) - \lambda \ell(x, y)) = 0 \quad \text{za vsako dopustno variacijo } v.$$

Ta izraz je enak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{y}(t)v_1(t) + x(t)\dot{v}_2(t) - \dot{x}(t)v_2(t) - y(t)\dot{v}_1(t)) dt \\ & \quad - \lambda \int_0^1 \frac{\dot{x}(t)\dot{v}_1(t) + \dot{y}(t)\dot{v}_2(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} dt \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{y}(t)v_1(t) - \left(\frac{y(t)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) \dot{v}_1(t) \right) dt \\ & \quad - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}(t)v_2(t) - \left(\frac{x(t)}{2} - \lambda \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) \dot{v}_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Primer 2: Euler-Lagrangejev sistem

Upošteva je Razmadzejevo lemo (oziroma z integracijo per partes obeh členov, ki vsebujeta $\dot{v}_1(t)$ in $\dot{v}_2(t)$) dobimo prirejen Euler-Lagrangejev sistem enačb:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}(t)}{2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right) &= 0, \\ \frac{\dot{x}(t)}{2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{2} - \lambda \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right) &= 0\end{aligned}$$

skupaj z robnim pogojem za prvo enačbo pri $t = 1$ (ker je vrednost $v_1(1)$ poljubna):

$$\frac{y(1)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(1)}{\sqrt{\dot{x}^2(1) + \dot{y}^2(1)}} = 0 \iff \dot{x}(1) = 0.$$

Pogoj $\dot{x}(1) = 0$ pomeni, da bo rešitev sekala os x pravokotno v toči $(x(1), 0)$.

Primer 2, rešitev

Obe Euler-Lagrangejevi enačbi lahko enkrat integriramo:

$$\begin{aligned}y(t) + \frac{\lambda \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= 0, \\x(t) - \frac{\lambda \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Integracijska konstanta v prvi enačbi je enaka 0, ker je pri $t = 1$ funkcija na levi strani enačbe enaka 0. Konstanta a je poljubna.

Če pomnožimo prvo enačbo z $\dot{y}(t)$, drugo z $\dot{x}(t)$ in seštejemo, dobimo z upoštevanjem $x(0) = y(0) = 0$:

$$\begin{aligned}x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= a\dot{x}(t), \quad a \in \mathbb{R} \\x(t)^2 + y(t)^2 &= 2ax(t) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\(x(t) - a)^2 + y(t)^2 &= a^2.\end{aligned}$$

Rešitev je polkrožnica s polmerom $a = l/\pi$ nad osjo x .

Primer 3: varianta na temo

Obravnavajmo analogen problem, le da iščemo **sklenjeno krivuljo fiksne dolžine $l > 0$, ki ograjuje lik z največjo ploščino.**

Rešitev iščemo v parametrični obliki $(x(t), y(t))$ ($t \in [0, 1]$) z robnimi pogoji

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Dopustne variacije so $\mathcal{C}^1$ funkcije $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ na $[0, 1]$ z $v(0) = v(1) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Euler-Lagrangejev sistem je enak kot v primeru 2, robni pogoji pa so sedaj trivialno izpolnjeni. Z enkratno integracijo Euler-Lagrangejevih enačb dobimo

$$\begin{aligned} x(t) - \frac{\lambda \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= a \in \mathbb{R} \\ y(t) + \frac{\lambda \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tako kot v primeru 2 zaključimo, da so rešitve krožnice

$$(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = a^2 + b^2 = (l/2\pi)^2.$$

Splošni problem vezanega ekstrema

Vrnimo se k splošni nalogi z m vezmi in podrobneje utemeljimo korake. Na prostoru $\mathcal{C}^2([a, b])$ imamo funkcionalne Lagrangejevega tipa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt \\ \mathcal{U}_j(x) &= \int_a^b U^j(t, x, \dot{x}) dt, \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Poiskati želimo funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ z danimi vrednostmi $x(a)$ in $x(b)$ v krajiščih, ki zadoščajo pogoju

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m,$$

pri katerih $\mathcal{L}(x)$ doseže ekstremno vrednost.

Na vektorskem prostoru dopustnih variacij

$$V = \{v \in \mathcal{C}^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

imamo (pri fiksnem $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$) linearne funkcionalne

$$\begin{aligned}\ell(v) &= \nabla_v \mathcal{L}(x) = \int_a^b \left(L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right) v(t) dt \\ u_j(v) &= \nabla_v \mathcal{U}_j(x) = \int_a^b \left(U_x^j - \frac{d}{dt} U_{\dot{x}}^j(t, x, \dot{x}) \right) v(t) dt, \quad 1 \leq j \leq m.\end{aligned}$$

Pogoj za nastop ekstrema

Ker opazujemo le tiste deformacije funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$, pri katerih imajo funkcionali $\mathcal{U}_j$ konstantno vrednost, so dopustne le deformacije funkcije x v smeri tistih funkcij $v \in V$, ki zadoščajo pogojem

$$u_j(v) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Funkcional $\mathcal{L}$ pri pogojih $\mathcal{U}_j = c_j$ ($j = 1, \dots, m$) ima torej stacionarno točko v x , če za vse $v \in V$, ki zadoščajo zgornjim pogojem, velja $\ell(v) = 0$. Na krako:

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell.$$

Trditev

Zgornja lastnost velja natanko tedaj, ko obstajajo števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (Lagrangejevi multiplikatorji), tako da je

$$\ell = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \quad \text{na prostoru } V.$$

V našem primeru je enakost v zgornji trditvi ekvivalentna diferencialni enačbi

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(U_x^j - \frac{d}{dt} U_{\dot{x}}^j(t, x, \dot{x}) \right)$$

s prostimi parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ob tem pa morajo biti izpolnjene tudi enačbe

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dokaz trditve. Dokazujemo

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell \implies \ell = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j.$$

Lahko privzamemo, da so funkcionali $u_1, \dots, u_m : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearno neodvisni.

(Če niso, izberemo največjo podmnožico linearno neodvisnih vektorjev. Ostali ne vplivajo na predpostavko, saj se presek jeder ne spremeni, če jih odvržemo; prav tako ne vplivajo na zaključek.)

Lemma

Če so linearni funkcionali $u_1, \dots, u_m : V \rightarrow \mathbb{R}$ na vektorskem prostoru V linearno neodvisni, obstajajo vektorji $v_1, \dots, v_m \in V$, tako da velja

$$u_i(v_j) = \delta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Dokaz Indukcija na m . Za $m = 1$ izberemo vektor $\tilde{v}_1 \in V$, tako da je $u_1(\tilde{v}_1) \neq 0$. Vektor

$$v_1 = \frac{1}{u_1(\tilde{v}_1)} \tilde{v}_1$$

tedaj zadošča $u_1(v_1) = 1$ in trditev velja za $m = 1$. Recimo, da velja za $m - 1$. Izberemo vektorje $v'_1, \dots, v'_{m-1}$, tako da je

$$u_i(v'_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m - 1.$$

Za poljuben $v \in V$ velja

$$w := v - \sum_{i=1}^{m-1} u_i(v) v'_i \in \bigcap_{j=1}^{m-1} \ker u_j,$$

kar vidimo iz

$$u_j(w) = u_j(v) - \sum_{i=1}^{m-1} u_i(v) u_j(v'_i) = u_j(v) - u_j(v) = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Dokaz leme

Trdimo, da obstaja vektor $v \in V$, tako da za prirejeni vektor w velja $u_m(w) \neq 0$. V nasprotnem primeru bi za vsak $v \in V$ veljalo

$$0 = u_m(w) = u_m(v) - \sum_{i=1}^{m-1} u_m(v'_i) u_i(v) = \left(u_m - \sum_{i=1}^{m-1} u_m(v'_i) u_i \right) (v),$$

torej bi bil u_m linearna kombinacija funkcionalov $u_1, \dots, u_{m-1}$ v protislovju s predpostavko. Za tako izbran vektor v vzamemo

$$v_m = \frac{1}{u_m(w)} w.$$

Tedaj je

$$u_m(v_m) = 1, \quad u_j(v_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Definiramo nove vektorje

$$v_i := v'_i - u_m(v'_i) v_m, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Tedaj za $i, j = 1, \dots, m-1$ velja

$$u_m(v_i) = u_m(v'_i) - u_m(v'_i) u_m(v_m) = 0, \quad u_j(v_i) = u_j(v'_i) = \delta_{ij}.$$

Zaključek dokaza trditve

Naj bo

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell$$

in funkcionali u_j linearno neodvisni. Po lemi obstajajo vektorji $v_1, \dots, v_m \in V$, tako da velja

$$u_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Poljuben vektor $v \in V$ zapišimo v obliki

$$v = \left(v - \sum_{i=1}^m u_i(v) v_i \right) + \sum_{i=1}^m u_i(v) v_i.$$

Prvi člen na desni je očitno v preseku jeder $\bigcap_{j=1}^m \ker u_j$ in zato po predpostavki tudi v $\ker \ell$. Torej je

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^m u_i(v) \ell(v_i), \quad v \in V.$$

Če definiramo števila $\lambda_i := \ell(v_i) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, sledi

$$\ell = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i.$$