

Analiza 3

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

20. predavanje: Hamiltonova mehanika

Euler–Lagrangejeve enačbe, ki podajajo ekstremale danega variacijskega problema, so pri problemih iz (Newtonove) fizike in mehanike v tesni zvezi s *Hamiltonovo mehaniko* in s Hamiltonovim *principom najmanjše akcije*.

Sir William Rowan Hamilton, 1808–1865

Povezavo omogoča **Legendrova transformacija**, ki ponuja posebno zanimivo in fizikalno pomensko redukcijo Euler–Lagrangejeve diferencialne enačbe drugega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda.

Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783

Dober vir za to povezavo, ki vsebuje globok vpogled v naravo stvari, ponuja klasična monografija

Vladimir Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics.
Nauka, Moskva, 1974

Primer: Newtonove enačbe gibanja

Opazujemo gibanje sistema n delcev v prostoru $\mathbb{R}^3$ pod vplivom potencialnega polja sil. Pot i -tega delca opisuje vektorska funkcija $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$; gibanje vseh delcev torej opisuje vektorska funkcija $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^N$, $N = 3n$. Če je m_i masa i -tega delca, so Newtonove enačbe gibanja

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i + U_{\mathbf{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tu je $U_{\mathbf{x}_i} = \partial U / \partial \mathbf{x}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} U$. Funkcija $U(\mathbf{x})$ je **potencialna energija** sistema, **kinetična energija** pa je

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2.$$

Naj bo $L = T - U$ razlika med kinetično in potencialno energijo. Tedaj je

$$L_{\dot{\mathbf{x}}_i} = T_{\dot{\mathbf{x}}_i} = m_i \dot{\mathbf{x}}_i, \quad L_{\mathbf{x}_i} = -U_{\mathbf{x}_i}.$$

Euler-Lagrangejev sistem enačb za Lagrangian L je

$$0 = L_{\mathbf{x}_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}_i} = -U_{\mathbf{x}_i} - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

D'Alembert–Hamiltonov princip minimalne akcije

Zaključek – princip najmanjše akcije: Ekstremale Euler-Lagrangejevega sistema za Lagrangian $L = T - U$ so rešitve Newtonovih enačb gibanja za sistem delcev s kinetično energijo T in potencialno energijo U .

Uvedimo novo spremenljivko, ki se imenuje **impulz** ali **gibalna količina**:

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}} = (m_i \dot{\mathbf{x}}_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^N.$$

Očitno lahko hitrostni vektor $\dot{\mathbf{x}}$ izrazimo z impulzom $\mathbf{p}$. Če to naredimo in vstavimo v (skalarno) funkcijo

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 2T - (T - U) = T + U,$$

je H funkcija spremenljivk $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Opazimo, da je $H_{\mathbf{x}} = -L_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{x}}$ in $H_{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{x}}$. Enačbe gibanja lahko s pomočjo funkcije H zapišemo kot sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

To je ravno **Hamiltonov sistem za $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ s Hamiltonovo funkcijo $H = T + U$, ki je vsota kinetične in potencialne energije sistema.**

Energija H se ohranja vzdolž rešitev sistema (trajektorij).

Korespondenca Lagrange $\Longleftrightarrow$ Hamilton

Kar smo naredili v posebnem primeru, skušajmo narediti za poljuben Lagrangian $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Spomnimo se Euler-Lagrangejevega sistema:

$$L_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

Osnovna ideja je, da uvedemo novo spremenljivko

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in iz zgornje enačbe skušamo izraziti $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$. Če nam to uspe, definiramo Hamiltonovo funkcijo H , prirejeno Lagrangianu L :

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})).$$

Sledi $H_t + L_t = 0$, $H_{\mathbf{x}} + L_{\mathbf{x}} = 0$ in Hamiltonov sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

Prva enačba sledi iz definicije funkcije H , druga pa iz $-H_{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{x}}$, Euler-Lagrangejeve enačbe in definicije spremenljivke $\mathbf{p}$. Seveda lahko prehodimo tudi obratno pot in Hamiltonianu H priredimo Lagrangian L .

Primer: konzervativni sistem

Opazujemo sistem s kinetično in potencialno energijo

$$T = T(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad U = U(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

D'Alembert–Hamiltonov princip trdi, da se sistem giblje tako, da je prva variacija funkcionala z Lagrangianom $L = T - U$ vzdolž trajektorije enaka nič:

$$\delta \int_a^b L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt = 0.$$

To je ekvivalentno Euler-Lagrangejevi enačbi

$$L_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0,$$

ki jo z uvedbo impulza

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in Hamiltonove funkcije

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

prevedemo v Hamiltonov sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

Če je kinetična energija T homogena kvadratična v $\dot{\mathbf{x}}$:

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = A\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

kjer je A simetrična neizrojena matrika in je potencialna energija U neodvisna od $\dot{\mathbf{x}}$, dobimo kot v posebnem primeru

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}} = 2A\dot{\mathbf{x}},$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{p},$$

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = 2A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} - (A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} - U) = A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + U = T + U.$$

Legendrejeva transformacija

Pri pretvorbi Euler-Lagrangejeve enačbe v Hamiltonovo enačbo smo s srečali z naslednjim problemom. Uvedli smo novo spremenljivko

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in skušali izraziti

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Spremenljivki t in $\mathbf{x}$ pri tem igrata vlogo parametra.

Oglejmo si ta problem natančneje, pri čemer bomo spremenljivko $\dot{\mathbf{x}}$ označili z $\mathbf{u}$, ostali dve spremenljivki t , $\mathbf{x}$ pa bomo zaenkrat ignorirali.

Dana je $\mathcal{C}^2$ funkcija $F(\mathbf{u})$ spremenljivke $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na neki domeni v $\mathbb{R}^n$. Zanima nas, kdaj lahko iz enačbe

$$\mathbf{p} = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = (F_{u_1}(\mathbf{u}), \dots, F_{u_n}(\mathbf{u})) = \nabla F(\mathbf{u})$$

izrazimo $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$. Po izreku o inverzni preslikavi rešitev v okolici dane točke $\mathbf{u}^0$ obstaja, če je Jacobijeva matrika preslikave $\mathbf{u} \mapsto F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ v točki $\mathbf{u}^0$ neizrojena. Ta Jacobijeva matrika pa je Hessejeva matrika funkcije F :

$$A = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Legendrejeva transformacija

Denimo, da je $\det A(\mathbf{u}^0) \neq 0$ in zato lokalni inverz $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$ obstaja v okolici točke $\mathbf{p}^0 = \nabla F(\mathbf{u}^0)$. Razlogi simetrije nakazujejo idejo, da bi poiskali drugo funkcijo $G(\mathbf{p})$ v okolici $\mathbf{p}^0$, tako da je tudi

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) = G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \nabla G(\mathbf{p}).$$

Če to velja, je totalni diferencial vsote $F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p})$ enak

$$d(F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p})) = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} + G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}),$$

zato je rešitev problema (z adicijsko konstanto 0)

$$F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}.$$

Obratno, iz zgornje identitete sledi

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}, \quad G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \mathbf{u}.$$

Funkcija G , dobljena iz te enačbe, se imenuje **Legendrejeva transformiranka** $G = \mathcal{L}(F)$ funkcije F in obratno, F je Legendrejeva transformiranka G .

Adrien Marie Legendre, 1752–1833

Geometrijski pomen Legendrove transformacije

Oglejmo si Legendrovo transformacijo v dimenziji $n = 1$, torej za funkcije ene spremenljivke. Dana je $\mathcal{C}^2$ funkcija $f(x)$. Pogoji za neizrojenost Hessejeve matrike je $f''(x) \neq 0$. Recimo, da je $f'' > 0$, torej je f strogo konveksna.

Za dano število $p \in \mathbb{R}$ skušamo najti x v domeni funkcije f , da je

$$f'(x) = p.$$

Ker je f strogo konveksna in je zato njen odvod f' strogo naraščajoča funkcija, je rešitev enolična, kjer obstaja. Naj bo $x = x(p)$ rešitev. Definiramo funkcijo

$$g(p) = px - f(x) = px(p) - f(x(p)).$$

Pri fiksnem p funkcija $x \mapsto px - f(x)$ doseže največjo vrednost pri $x = x(p)$, saj je v tej točki njen odvod po x enak 0, njen drugi odvod pa je $-f''(x) < 0$.

Zaključek:

- Pri fiksnem p je $g(p)$ maksimalna vrednost funkcije $x \mapsto px - f(x)$.
- Pri fiksnem x je $f(x)$ maksimalna vrednost funkcije $p \mapsto px - g(p)$.

Primeri

Primer 1:

$$f(x) = x^2, \quad p = f'(x) = 2x, \quad x = p/2,$$

$$g(p) = px - x^2 = \frac{p^2}{2} - (p/2)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Primer 2:

$$f(x) = \frac{x^a}{a}, \quad a > 1.$$

$$p = f'(x) = x^{a-1}, \quad x = p^{1/(a-1)},$$

$$g(p) = px - \frac{x^a}{a} = p^{a/(a-1)} - p^{a/(a-1)} / a = \frac{p^b}{b},$$

kjer je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (\text{konjugirana eksponenta}).$$