Metrični prostori

Definicija metričnega prostora in krogle

Metrični prostor (M, d) je neprazna množica M skupaj s preslikavo d, ki zadošča aksiomom metrike.

Aksiomi metrike:

M1: $d(x, y) \geq 0$

M2: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3: $d(x, y) = d(y, x)$

M4: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Krogle s središčem v x in polmerom r v metriki d:

Odprta krogla $K(x, r) = \{y;\ d(x, y) < r\}$

Zaprta krogla $\overline{K}(x, r) = \{y;\ d(x, y) \leq r\}$

Naloge

1. Katere preslikave določajo metriko na $\mathbb{R}$?

a) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

b) $d(x, y) = 2|x - y|$

c) $d(x, y) = \min\{2, |x - y|\}$

2. Naj bosta $M = (0, \infty)$ in $d : M \times M \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right|.$$

a) Dokaži, da je (M, d) metrični prostor.

b) Določi krogli $K(1, \frac{1}{4})$ in $\overline{K}(1, 2)$.

3. Na množici $M = (0, \infty)^2$ definiramo $d : M \times M \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \left| \ln \frac{y_1}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{x_2} \right|,$$

kjer je $\underline{x} = (x_1, x_2)$ in $\underline{y} = (y_1, y_2)$.

a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.

b) Izračunaj in skiciraj $\overline{K}((1, 1), 1)$.

Metrike d_p

d_p metrike na $\mathbb{R}^n$:

$$d_p((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \quad ; \; p \geq 1$$

$$d_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|,\ldots |x_n - y_n|\}$$

Metriki d_1 pravimo *manhattanska*, metriki d_2 *evklidska*, metriki d_∞ pa *maksimum* metrika.

Naj bo $p \geq 1$ in $a < b$. **Integralska metrika** d_p na prostoru $\mathcal{C}[a,b]$ zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$ je definirana po predpisu:

$$d_p(f,g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Maksimum metrika d_∞:

$$d_\infty(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Naloge

4. Katera točka na premici $y = 2x + 1$ je najbližja točki $(0,0)$ v metriki d_1, d_2 in d_∞?

5. a) Poišči vse točke v $(\mathbb{R}^2, d_2)$, ki so enako oddaljene od $(1,0)$ in $(0,1)$.

b) Poišči vse točke v $(\mathbb{R}^3, d_2)$, ki so enako oddaljene od $(1,1,1)$ in $(1,2,3)$.

6. Naj bosta $f(x) = x^3$ in $g(x) = 2 - x^2$.

a) Naj bo $M = \mathcal{C}([-1,1])$. Izračunaj $d_1(f,g)$ in $d_\infty(f,g)$.

b) Naj bo $M = \mathcal{C}([-2,2])$. Izračunaj $d_1(f,g)$ in $d_\infty(f,g)$.

7. Naj bo $a > e > 0$. V metriki d_1 skiciraj elipso z goriščem $F_1(e,0)$ in $F_2(-e,0)$ ter polosjo a.

Odprtost/zaprtost množice v metričnem prostoru

Naj bo A podmnožica metričnega prostora.

Notranjost množice A sestavljajo tiste točke a, za katere obstaja krogla $K(a,r)$, ki je vsebovana v A.

Zunanjost množice A sestavljajo tiste točke a, za katere obstaja krogla $K(a,r)$, ki ima z A prazen presek. Zunanjost množice A je torej notranjost njenega komplementa.

Rob množice A sestavljajo točke, ki niso niti notranje niti zunanje, t. j. točke a, pri katerih vsaka krogla $K(a,r)$ vsebuje tako točke, ki so v A, kot točke, ki niso v A.

Množica A je odprta, če so vse njene točke notranje, torej če ne vsebuje nobene svoje robne točke.

Množica A je zaprta, če vsebuje vse svoje robne točke.

Naloge

8. Za spodnje podmnožice metričnega prostora $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ugotovi, ali so zaprte/odprte:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1,\ y \geq 1\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1,\ y > 1\}$

e) $E = \mathbb{R} \times \{0\}$

Omejenost metričnega prostora

$A \subset (M, d)$ je omejena, če obstajata $a \in M$ in $r > 0$, da je $A \subseteq K(a, r)$.

Naloge

9. Dana je funkcija dveh spremenljivk:

$$d(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & ; m \neq n \\ 0 & ; m = n \end{cases}.$$

a) Dokažite, da je d metrika na množici naravnih števil.

b) Je dobljeni metrični prostor omejen? Če je, kolikšen je njegov diameter?

Zveznost preslikav

Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora.

Preslikava $f : M \to M'$ je v točki $a \in M$ **zvezna** glede na metriki d in d', če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in M$ iz $d(x, a) < \delta$ sledi $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Preslikava $f : M \to M'$ je glede na metriki d in d' **Lipschitzeva s konstanto** q, če je $d'(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$ za vse $x, y \in M$.

Vsaka Lipschitzeva preslikava je zvezna, obratno pa ni nujno res.

Naloge

10. Je preslikava $f(x) = \sqrt{x}$ zvezna ali Lipschitzeva z običnajno metriko

a) kot preslikava iz $[0, \infty)$ v $[0, \infty)$?

b) kot preslikava iz $[1, \infty)$ v $[1, \infty)$?

11. Naj bo $I : \mathcal{C}[2, 3] \to \mathbb{R}$ preslikava, ki funkcijo f preslika v integral $\int_2^3 x^2 f(x) dx$. Če $\mathcal{C}[2, 3]$ opremimo z metriko d_1, $\mathbb{R}$ pa z običajno metriko, je preslikava I zvezna? Je Lipschitzeva?

Zaporedja v metričnih prostorih

Zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ v metričnem prostoru (M, d) **konvergira** k $a \in M$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a, x_n) < \epsilon$ za vse $n \geq n_0$.

Zaporedje $x_1, x_2, x_3, \ldots$ v metričnem prostoru (M, d) je **Cauchyjevo**, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \geq n_0$ velja $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Vsako konvergentno zaporedje je Caucyjevo, obratno ni nujno res.

Metrični prostor je **poln**, če je vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno.

Naloge

12. Naj bo $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \ldots$ in $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = 0$. Ali je zaporedje točk $x_n = (\cos \varphi_n, \sin \varphi_n)$ konvergentno v evklidski metriki d_2?
Dodatno: Ali je Cauchyjevo?

13. Ali je zaporedje 1, 2, 3, … konvergentno v metriki d?

$$d(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; & m \neq n \\ 0; & m = n \end{cases}$$

14. Naj bo $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2n^2-1}{n^2+1})$. Ali zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno v $(\mathbb{R}^2, d_2)$?

15. Naj bo $x_n = (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}, \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n-1}, \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2-1}})$. Ali zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno v $(\mathbb{R}^3, d_2)$?

16. Določite, katera od funkcij $f_a(x) = ax$ je najbližja funkciji $f(x) = x^2 - 1$ v metriki

$$d_2(g, h) = \left(\int_0^1 (g(x) - h(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dodatne naloge

17. Na množici $M = \mathbb{R}^2$ definiramo $d : M \times M \to \mathbb{R}$ s predpisom $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.

b) Izračunaj in skiciraj $\overline{K}((1, 1), 2)$.

18. Naj bo $M = \mathbb{R}$. Naj bosta $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $d : M \times M \to \mathbb{R}$ podani s predpisoma

$$q(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{in} \quad d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & q(x) = q(y) \\ |x - y| + 1 & q(x) \neq q(y). \end{cases}$$

a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.

b) Določi $K(0, 1)$, $\overline{K}(0, 2)$ in $\overline{K}(\sqrt{2}, 1)$.

19. Naj bo $M = (0, \infty)$. Naj bo $d : M \times M \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$

a) Pokaži, da je d metrika na M.

b) Nariši kroglo $K(1, 2)$.

Rešitve

1 a) ni metrika b) je metrika c) je metrika

2 $K(1, \frac{1}{4}) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $\overline{K}(1, 2) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$

3 $\overline{K}((1, 1), 1)$: območje med krivuljami $y = \frac{e}{x}$, $y = \frac{x}{e}$, $y = ex$ in $y = \frac{1}{ex}$.

4 $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{2}{5}$, $x = -\frac{1}{3}$

5 a) simetrala lihih kvadrantov b) ravnina $\{(x, y, \frac{11-2y}{4});\ x, y \in \mathbb{R}\}$

6 a) $\frac{10}{3}$ in 2 b) $\frac{41}{6}$ in 10

7 Enačba elipse: $d_1(T, F_1) + d_1(T, F_2) = 2a$

8 a) A je odprta in ni zaprta b) B ni odprta in je zaprta c) C ni odprta in ni zaprta d) D je odprta in ni zaprta e) E ni odprta in je zaprta

9 Je omejen

10 a) je zvezna, ni Lipschitzeva b) je zvezna, je Lipschitzeva s konstanto $\frac{1}{2}$

11 Je zvezna in je Lipschitzeva s konstanto 9.

12 zaporedje je konvergentno in Cauchyjevo.

13 ne

14 Ja, konvergira k točki $(0, 2)$.

15 Ja, konvergira k točki $(1, e, \frac{3}{2})$.

16 $f_{-3/4}$

18 $K(0, 1) = (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$, $\overline{K}(0, 2) = ([-2, 2] \cap \mathbb{Q}) \cup ([-1, 1] \cap \mathbb{Q}^c)$ in $\overline{K}(\sqrt{2}, 1) = (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1) \cap \mathbb{Q}^c$.

19 $K(1, 2) = (\frac{1}{3}, \infty)$