

Domače naloge

NALOGA 1.1. Naj bo $M = \mathbb{R}^2$ in $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dana z

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

1. Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
2. Skiciraj odprto kroglo $B((1, 2), 3)$.

REŠITEV.

NALOGA 1.2. Naj bo M_2 množica vseh realnih 2×2 matrik in preslikava $n : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana z

$$n\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \max(|a|, |b|, |c|, |d|)$$

Naj bo $d : M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana z

$$d(A, B) = n(A - B).$$

Ali je (M_2, d) metrični prostor?

Naj bo $U = \{A \in M_2; \det(A) = 0\}$ podmnožica vseh matrik z ničelno determinanto. Ali je U zaprta v (M_2, d) ?

REŠITEV.

NALOGA 1.3. Naj bo (M, d) metrični prostor in $Z_1, \dots, Z_n$ zaprte podmnožice v M . Pokaži, da je

$$Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$$

zaprta množica v M .

REŠITEV.

NALOGA 1.4. Dano naj bo rekurzivno zaporedje v $\mathbb{R}$

$$x_1 = 0 \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}.$$

S pomočjo Banachovega skrčitvenega načela preveri, da je zaporedje konvergentno.

REŠITEV.

NALOGA 1.5. Pokaži, da ima diferencialna enačba

$$y' = 2y + x^2 \quad y(1) = 2$$

na intervalu $[1, \frac{4}{3}]$ natanko eno rešitev in jo izračunaj.

REŠITEV.

NALOGA 1.6. Dan naj bo metrični prostor $(\mathcal{C}([0, \frac{1}{8}]), d_\infty)$ in preslikava

$$\phi : \mathcal{C}([0, \frac{1}{8}]) \rightarrow \mathcal{C}([0, \frac{1}{8}])$$

s predpisom

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \left(-3f(t) + \int_0^t \left(-3f(\tau) + \int_0^\tau (\xi - f(\xi)) d\xi \right) d\tau \right) dt.$$

Pokaži, da je ϕ skrčitev in določi negibno točko preslikave ϕ .

REŠITEV.

NALOGA 1.7. Dana naj bo funkcija $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$u(x, y) = e^x \sin x \cos y \cosh y - e^x \cos x \sin y \sinh y.$$

Preveri, da je u harmonična funkcija in določi njen harmonični komplement.

Za katero holomorfno funkcijo $f(z)$ je $\operatorname{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$?

REŠITEV.

NALOGA 1.8. Razvij v Taylorjevo oz. Laurentovo vrsto funkcije:

1. $f(z) = \frac{\sin^2(z)}{z}$ okoli $z_0 = 0$.
2. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ okoli $z_0 = 0$, da bo dobljena vrsta konvergirala za $|z| < 1$.
3. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ okoli $z_0 = 0$, da bo dobljena vrsta konvergirala za $|z| > 1$.
4. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ okoli $z_0 = 1$, da bo dobljena vrsta konvergirala za $|z - 1| < 2$.
5. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ okoli $z_0 = 1$, da bo dobljena vrsta konvergirala za $|z - 1| > 2$.
6. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ okoli $z_0 = 2i$, da bo dobljena vrsta konvergirala za $|z - 2i| > \sqrt{5}$.

REŠITEV.

NALOGA 1.9. Dana naj bo funkcija

$$f(z) = \frac{z+1}{\sin z}.$$

Poišči kakšen Laurentov razvoj funkcije f okoli točke $z_0 = 0$.

Nasvet: Uporabi naslednje:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} = \frac{1}{z(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - q},$$

kjer je $q = \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots$. Sedaj lahko uporabimo

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

REŠITEV.

NALOGA 1.10. S pomočjo izreka o residuih izračunaj

1. $\oint_K \frac{e^z}{\sin^2 z} dz$, kjer je $K = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 5\}$, pozitivno orientirana.
2. $\oint_K \frac{z+1}{z^3+i} dz$, kjer je $K = \{z \in \mathbb{C}; |z-i| = 1\}$, pozitivno orientirana.
3. $\oint_K \frac{z^2+z}{\cosh z} dz$, kjer je $K = \{z \in \mathbb{C}; |z - i\frac{\pi}{2}| = 1\}$, pozitivno orientirana.

Nasvet: Najprej poišči pole funkcije, in nato ugotovi kateri od teh polov ležijo znotraj dane krivulje.

REŠITEV.