

GEOMETRIJSKI POMEN ODVODA

DEFINICIJA:

FUNKCIJA $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ JE ODVEDLJIVA V $a \in D$,
ČE OBSTAJA LIMITA:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

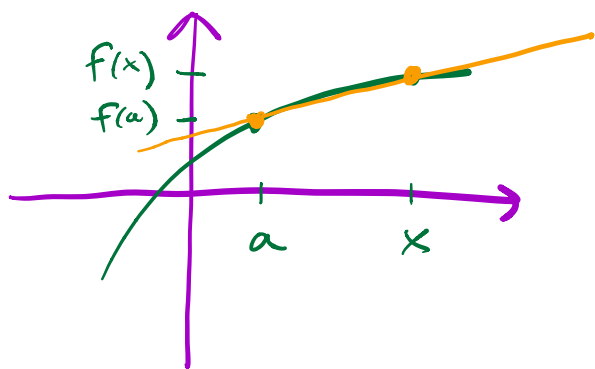
DODATEK: ČE TA LIMITA OBSTAJA V VSAKI TOČKI $a \in D$, PRAVIMO, DA JE f ODVEDLJIVA NA D ,
S PREDPISOM $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ PA JE DEFINIRANA
NOVA FUNKCIJA f' NA D , KI JI REČENO ODVOD f NA D .

KAKŠEN JE GEOMETRIJSKI POMEN TE DEFINICIJE?

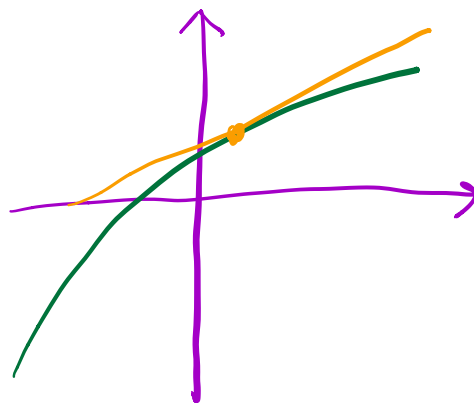
VELJA:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ZADNJI IZRAZ PREDSTAVLJA KOEFICIENT SEKANTE
SKOZI TOČKI $(x, f(x))$ IN $(a, f(a))$.



$x \rightarrow a$



V LIMITI TOREJ DOBI MO KOEFICIENT TANGENTE $k_t = f'(a)$.
t.j. SMERNI KOEFICIENT PREMICE, KI SE NAJBOLJE
PRILEGA FUNKCIJI f V TOČKI $(a, f(a))$.

NALOGA:

(a) POIŠČI ENAČBO TANGENTE NA $f(x) = -x^2 + x + 2$, KI JE VZPOREDNA PREMICI $y = 3 - 3x$.

(b) POIŠČI ENAČBO NORMALE NA $f(x) = \sqrt{\ln x}$ V $x = e$.

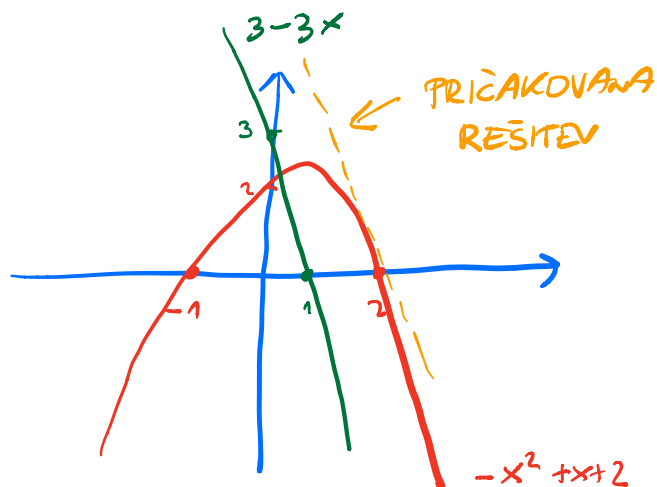
REŠITEV:

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$



DEJSTVO: PREMICI STA VZPREDNI KATANKO TEDA, KO IMATA ENAK SMERNI KOEFICIENT.

IŠČENO TOREJ TOČKO, V KATERI JE:

$$f'(x) = -3$$

$$-2x + 1 = -3$$

$$-2x = -4$$

$$\boxed{x = 2}$$

SEDAJ ZAPIŠEMO ENAČBO PREMICE SKOZI $x = 2$, $y = f(2) = 0$ IN S KOEFICIENTOM $k = -3$: $y = -3(x - 2)$

(b) DEFINICIJA: NORMALA JE PREMICA, KI JE V DANI TOČKI PRAVOKOTNA NA TANGENTO.

DEJSTVO: PREMICI S KOEF. k_1 IN k_2 STA PRAVOKOTNI NATANKO TEDAJ, KO JE $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

$$f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$f(e) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$$

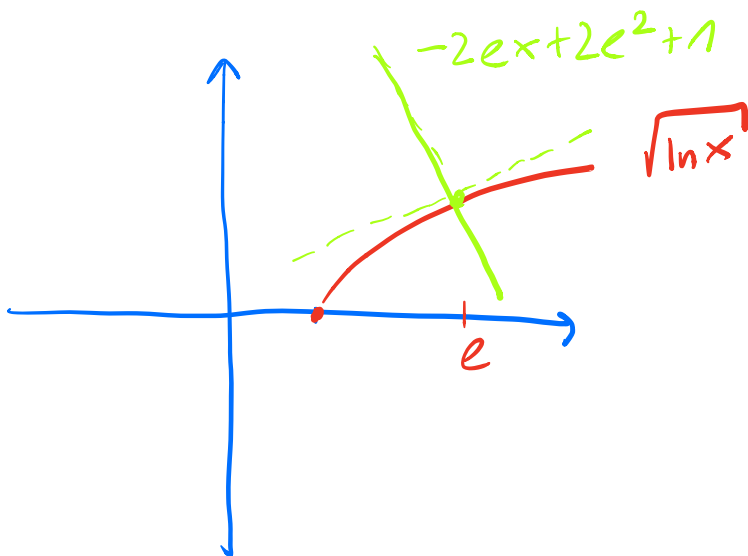
$$f'(e) = \frac{1}{2e} = k_t$$

$$k_n = -2e \quad \text{KOEF. NORMALE}$$

NORMALA NA f
V TOČKI $(e, 1)$ MA
ENACBO:

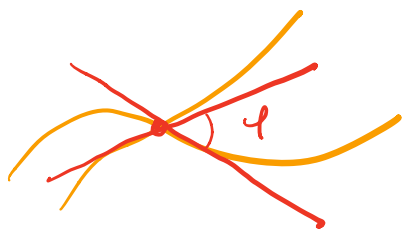
$$y - 1 = -2e(x - e)$$

$$y = -2ex + 2e^2 + 1$$



NALOGA: POD KAKŠNIM KOTOM SE SEKATA FUNKCIJI
 $f(x) = \sin x$ IN $g(x) = \cos x$?

DEFINICIJA:



KOT MED KRIVULJAMA BOMO DEFINIRALI
KOT OSTRI KOT MED TANGENTAMA
NA FUNKCIJI (V PRESEČIŠČU).

DEJSTVO: $\varphi = \arctan \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \in [0, \frac{\pi}{2})$

OPOMBE: ~ČE BI ŽELELI TOPI KOT, BI MORALI IZBRATI
DRUGAČEN INVERZ ZA $\tan \varphi$.

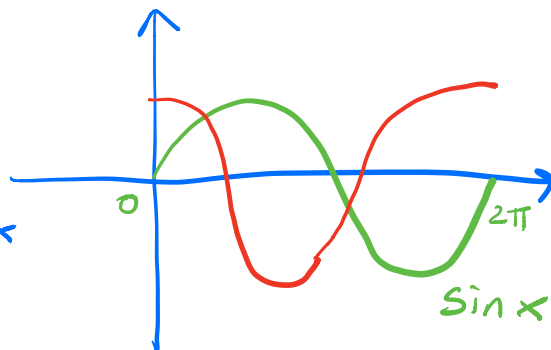
~ ZA $1 + k_1 k_2 = 0$ DOBIMO $\varphi = \frac{\pi}{2}$, SAJ $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

~ ČE IZPUSTIMO ABSOLUTNO VREDNOST, DOPUSTIMO TUDI
NEGATIVNE VREDNOSTI +.j. REZULTAT JE ODVIŠEN
OD TEGA, KATERA PRENICA JE 'ZGORAJ' IN KATERA 'SPODAJ'!

NAŠ PRIMER:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \sin x &= \cos x \quad | : \cos x \\ \tan x &= 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



BREZ ŠKODE ZA SPLOŠNOST SE OMEJIMO NA $x = \frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow k_1 = f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g'(x) = -\sin x \Rightarrow k_2 = g'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arctan \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \right| = \arctan \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \arctan 2\sqrt{2} \approx 70,5^\circ$$