

2. kolokvij Analiza 3

15. 1. 2021

Naloga 1 (25 točk). Poišči kritično točko funkcionala

$$\mathcal{L}(y) = \int_{-1}^1 e^{x+1}(y'^2 + 2y^2)dx,$$

z robnimi pogoji $y(-1) = \cosh(\sqrt{2})$, $y(1) = e^2 \cosh(\sqrt{2})$.

Naloga 2 (35 točk). Poišči splošno rešitev enačbe

$$y'' - 6y' + 8y = 5 \cos x + 6e^{2x}.$$

Naloga 3 (40 točk). Podan je sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y - x^3 - y^2 = f(x, y) \\ \dot{y} &= x - y + xy = g(x, y).\end{aligned}$$

a) (10 točk) Poišči funkcijo Ljapunova u za polje $W(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ oblike

$$u(x, y) = ax^2 + by^2 + cx^4 + dy^4.$$

b) (20 točk) Lineariziraj polje W v okolici izhodišča in poišči splošno rešitev lineariziranega sistema. Tj. poišči takšno matriko $A \in M_2(\mathbb{R})$ s konstantnimi koeficienti, da bo v okolici izhodišča veljalo

$$W(v) = A \cdot v + \eta(v), \quad \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|\eta(v)\|}{\|v\|} = 0,$$

in reši sistem $\dot{v} = A(v)$, kjer je $v = (x, y)$.

c) (10 točk) Naj bo γ tokovnica polja W . Za poljuben začetni pogoj $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ dokaži, da obstaja limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$$

in jo izračunaj. **Namig:** pomagaj si s točko a).