

Preden se lotimo pojma zvezanosti, moramo se
dolezati osnovno (karakteristično) enačbo
za logaritmsko funkcijo:

Spomnimo se:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \quad *$$

Dokaz: Označimo

$$a^{x_1} = y_1 \quad a^{x_2} = y_2$$

$$x_1 = \log_a(y_1) \quad x_2 = \log_a(y_2)$$

Spomnimo se enačbe za eksponentno funkcijo:

$$a^{(x_1 + x_2)} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad / \cdot \log_a$$

$$\log_a(a^{(x_1 + x_2)}) = \log_a(a^{x_1} \cdot a^{x_2})$$

$$x_1 + x_2 = \log_a(a^{x_1} \cdot a^{x_2})$$

$$\log_a(y_1) + \log_a(y_2) = \log_a(y_1 \cdot y_2)$$

S tem je enačba * dokazana

□

Sedaj se posvetimo pojmu zveznosti funkcij.

Zveznost in limiti

Velika večina funkcij, ki jih srečujemo in obravnavamo v matematiki in v obujih zveznosti, so bolj ali manj zvezne funkcije.

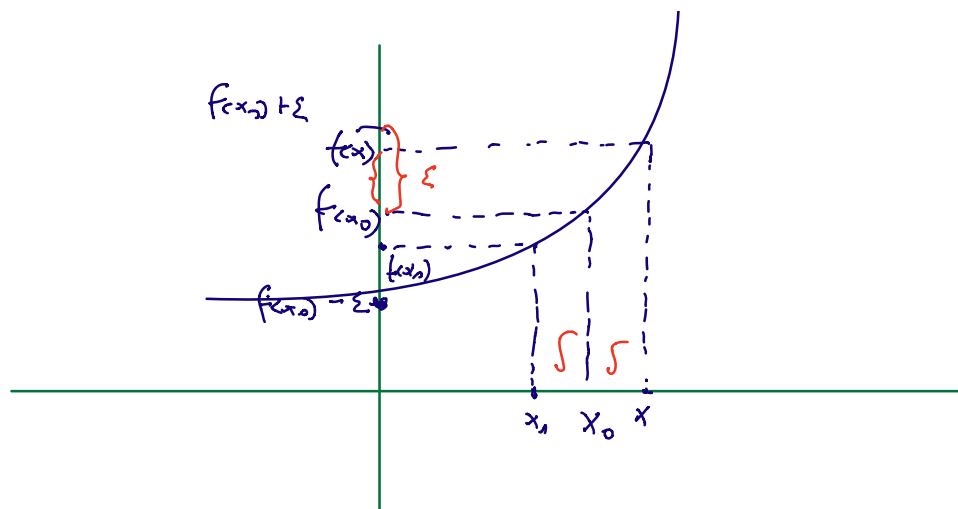
Definicija Naj bo $[a, b]$ interval v $\mathbb{R}$. Funkcija

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

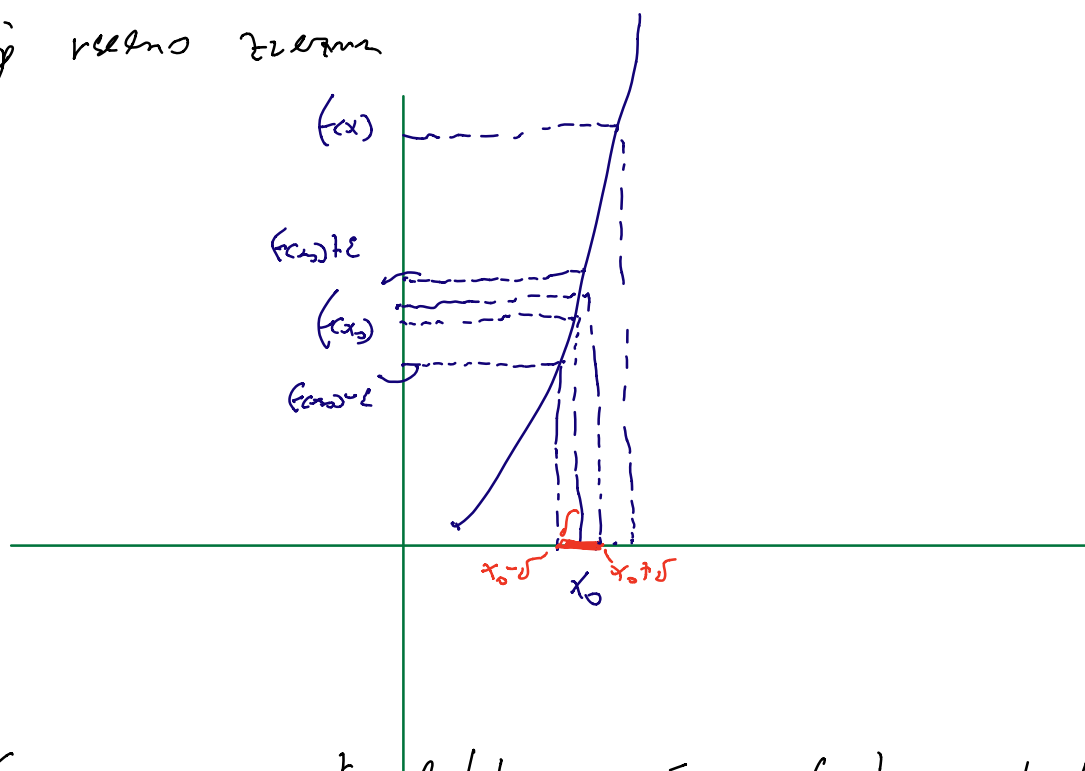
je v točki $x_0 \in (a, b)$ **zvezna**, če velja:

za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Apraksts: Mūsu funkcija se šķūks rēls hītās sprēmīnīz,
 pē j' rēlās zērnās

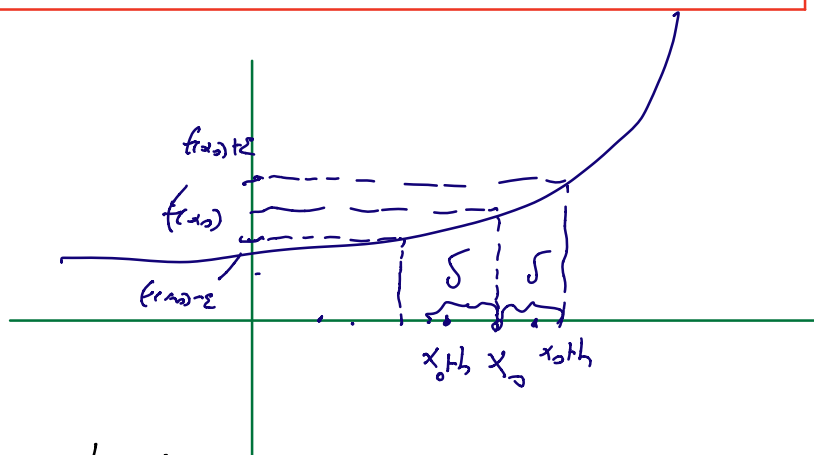


Defīnīcīz zērnās hītās zēpīšēns fūnktī nēkēlās
 dīspzē; bēzē rēlās, z' slūzīmī ožnēlēmīz.

Def: Funkcija
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

je zvezna v točki x_0 , če za vsak $\varepsilon > 0$
 obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

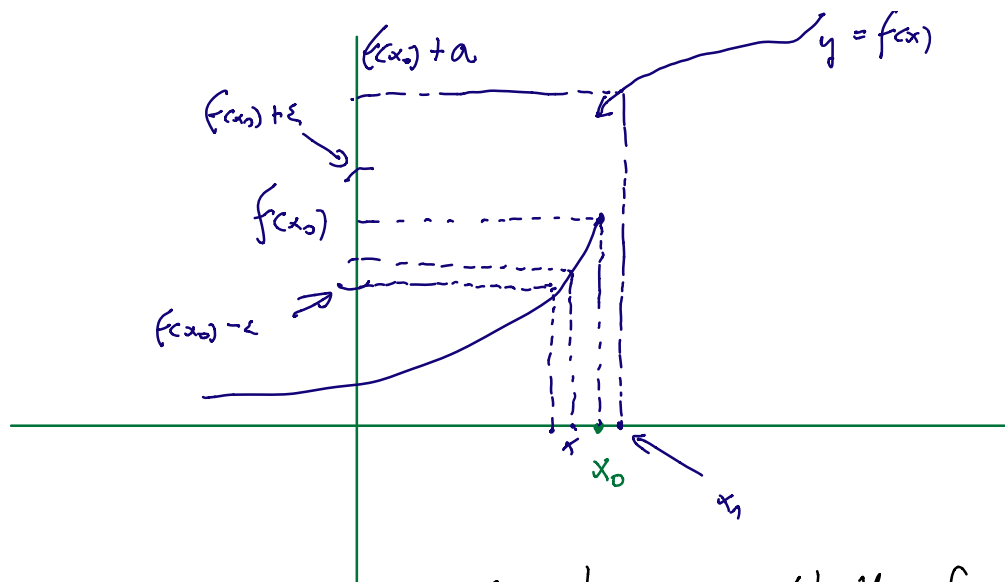


Zvezna med oznaki:

$$h = x_0 - x$$

Torej $|h|$ je razdalja $|x_0 - x|$ med x_0 in x .

Kako izpove funkcija, ki v x_0 ni zvezna.



Za $\varepsilon > 0$, ki je manjši od a , obstaja $\delta > 0$,
 katerega obstoj zleku definicije zveznosti,
 ne obstaja.

Funkcije $f(x)$ ne skaka in $x = x_0$ skoke.

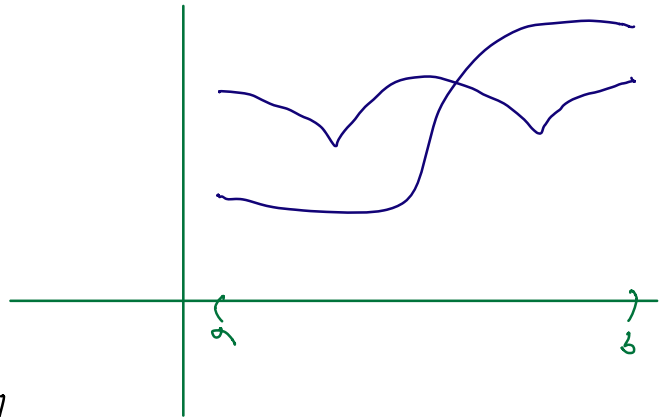
Definicija Funkcije

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

je na intervalu (a, b) zvezna, če je zvezna
 v vsaki točki $x_0 \in (a, b)$.

Opomba: Graf funkcij, ki so zvezne na intervalu

(a, b) so neprekinjene funkcije, katerih projekcija na x -os je interval (a, b)



Primer: Definiirajmo funkcijo

$$f_Q : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

s predpisom

$$f_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \\ 0 & x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ta funkcija ni zvezna v nobeni točki $(0, 1)$.

Primer: Prepišajmo se, da je vsaka linearna funkcija zvezna.

Naj bo $f(x) = kx + n$

Naj $x_0 \in \mathbb{R}$. Dokazujemo: $f(x)$ je zrazen v x_0 .

Primerjajmo vredosti $f(x_0)$ in $f(x_0 + h)$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= k(x_0 + h) + m = \overbrace{kx_0 + m}^{f(x_0)} + k \cdot h = \\ &= f(x_0) + k \cdot h \end{aligned}$$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |k \cdot h| = |k| |h|$$

Naj ϵ sedaj $\epsilon > 0$ poljubno število. Iščemo $\delta > 0$, da h velja:

$$\begin{aligned} |h| < \delta &\Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \epsilon \\ |k| |h| &< \epsilon \end{aligned}$$

Torej, tukaj vidimo, da za δ lahko vzamemo:

$$\delta = \frac{\epsilon}{|k|},$$

Res:

$$\begin{aligned} \underline{|h| < \delta = \frac{\epsilon}{|k|}} &\Rightarrow \underline{|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |k| |h|} < |k| \frac{\epsilon}{|k|} \\ &= \underline{\epsilon} \end{aligned}$$

Torej res: $\exists$ tak δ izbrani δ ($\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$) velja

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

torej, $f(x)$ je v $x = x_0$ zvezna. Ker je L in x_0 poljubni realni števila, velja, da je $f(x) = kx + n$ zvezna na vsem $\mathbb{R}$.

Dokazimo še zveznost funkcij $f(x) = \sin(x)$ na vsem $\mathbb{R}$.

Izberimo poljuben $x_0 \in \mathbb{R}$. Primerjajmo vredsti

$\sin(x_0+h)$ in $\sin(x_0)$. Spomnimo se

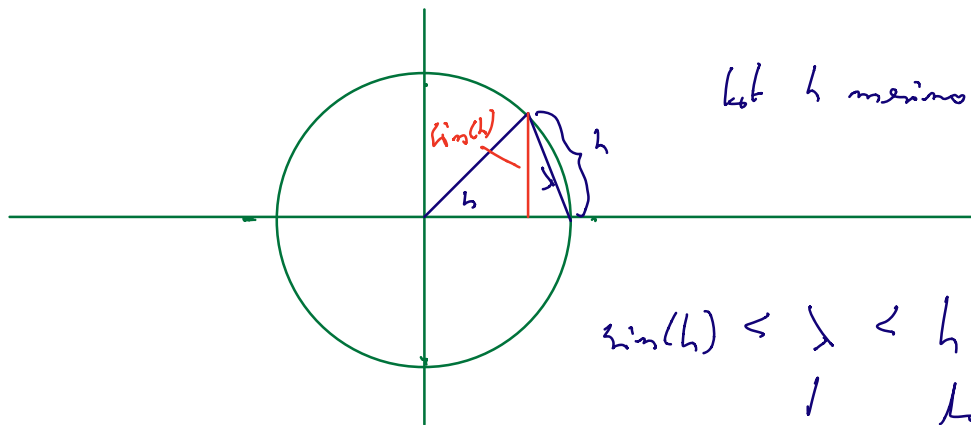
adicijskega izreka:

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$$

$$\begin{aligned}\sin(x_0+h) - \sin(x_0) &= \sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0) \\ &= \sin(x_0)(\cos(h) - 1) + \sin(h)\cos(x_0)\end{aligned}$$

Pokažemo bomo: $h \ll 1 \Rightarrow \sin(h) \ll 1$ in

$$h \ll 1 \Rightarrow (\cos(h) - 1) \ll 1$$



kt h maie mo v me $\dot{z}$ ni $\dot{s}$ h

$$\sin(h) < \lambda < h$$

| |
 $h \in$
 ok

Te $\dot{z}$ o $\dot{z}$:

$$\sin(h) < h \quad \text{wz} \quad h \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

T $\dot{z}$ ej wi $\dot{z}$ ci:

$$|\sin(h)| < |h|$$

P $\dot{z}$ ej ko $\dot{z}$ po i $\dot{m}$ o po P $\dot{z}$ it $\dot{a}$ g $\dot{o}$ rem i $\dot{z}$ te $\dot{z}$ ci:

$$\cos^2(h) + \sin^2(h) = 1$$

$$1 - \cos^2(h) = \sin^2(h)$$

$$(1 - \cos(h))(1 + \cos(h)) = \sin^2(h)$$

$$1 - \cos(h) = \frac{\sin^2(h)}{1 + \cos(h)}$$

$$|1 - \cos(h)| = \frac{\sin^2(h)}{1 + \cos(h)} < \frac{\sin^2(h)}{1} < \frac{h^2}{1}$$

$$|1 - \cos(h)| < h^2$$

Tęż:

$$\begin{aligned} |\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)| &\leq |\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h)| < \\ &\leq h^2 \cdot |\sin(x_0)| + |h| |\cos(x_0)| = \\ &= h (h |\sin(x_0)| + \cos(x_0)) \end{aligned}$$

Nyż, gdy $\varepsilon > 0$ jest dowolnym. Lecz j
wskazujemy, że dla każdego takiego h mamy:

$$|h (h |\sin(x_0)| + \cos(x_0))| < \varepsilon$$

D.N. Należy zatem znaleźć odpowiednie h .

$$|h (h |\sin(x_0)| + \cos(x_0))| < |h (h |\sin(x_0)| + |\cos(x_0)|)|$$

choć $(2) < \varepsilon$, to także $(1) < \varepsilon$.

$$\text{skąd } h = \frac{\varepsilon}{|\sin(x_0)| + |\cos(x_0)|}$$

Tęj, pokazali smo, że $f(x) = \sin(x)$ jest
w każdym $x_0 \in \mathbb{R}$, też

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

jest funkcją.