

1. izpit Analiza 3

25.1.2021

Naloga 1 (25 točk). Poišči splošno rešitev enačbe

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Naloga 2 (25 točk). Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, zvezno parcialno odvedljiva po y , s kompaktnim nosilcem

$$\text{supp } f = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \neq 0\}}.$$

Podana je Cauchyjeva naloga

$$y' = \sin(xy) + f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Dokaži, da za poljubna x_0, y_0 obstaja enolično določena zvezno odvedljiva rešitev Cauchyjeve naloge, definirana na celotni realni osi.

Naloga 3 (25 točk). Poišči splošno rešitev enačbe

$$x^2 y'' + 5xy' - 5y = 4 \ln x.$$

Naloga 4 (25 točk). Poišči kritično točko funkcionala

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dx$$

pri robnih pogojih $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 2$ in pri pogoju

$$\int_0^{\pi/2} y dx = \frac{\pi}{2}.$$