

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

1   2   3   4    $\Sigma$

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

---

Ime in priimek

## Naloga 1 [25 točk]

Rešujete sistem enačb  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kjer je sta  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  dana matrika in vektor desnih strani. Veste, da je  $a_{ij} = 0$  za  $j \leq n - i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

- Zapišite kar se da enostaven pogoj za elemente matrike  $A$ , ki zagotavlja enolično rešitev sistema enačb.
- Recimo, da ima sistem enolično rešitev. Zapišite **ekonomičen** algoritem za njegovo reševanje in utemeljite red časovne zahtevnosti.
- Kako bi numerično izračunali  $\det A$ ?

## Naloga 2 [25 točk]

Poiščite interpolacijski polinom najnižje možne stopnje v Newtonovi obliki, za katerega je  $p(0) = 1$ ,  $p(2) = -1$ ,  $p'(2) = 3$ ,  $p''(2) = 4$  in  $p(3) = 4$ . Nato ocenite napako interpolacije na  $[0, 3]$ , če so interpolacijske vrednosti dobljene kot vrednosti funkcije, ki je vsaj petkrat zvezno odvedljiva in je njen peti odvod na  $[0, 3]$  po absolutni vrednosti omejen z 1.

### Naloga 3 [25 točk]

V družini funkcij

$$f(x) = \alpha_1 \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{3} + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \alpha_3 \frac{(x+2)(x+1)}{6}$$

želite poiskati tisto, ki se najboljše prilega podatkom

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & 4 & 0 & -4 \end{array}$$

po metodi najmanjših kvadratov. Zapišite predoločen sistem linearnih enačb in nato s pomočjo pripadajočega normalnega sistema izračunajte koeficiente  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  in  $\alpha_3$ . Ni nujno, da uporabite razcep Choleskega.

## Naloga 4 [25 točk]

Za reševanje začetnega problema  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , izberete trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})).$$

- a) Preverite, da je točna rešitev problema za  $f(x, y) = -y$  in  $y(0) = 1$  padajoča. Za katere korake  $h > 0$  je tudi zaporedje približkov  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ , dobljeno s trapezno metodo, padajoče.
- b) Začetni problem drugega reda  $y'' = -y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ , zapišite kot sistem prvega reda in izpeljite algoritem za računanje približkov s trapezno metodo.

---

Ime in priimek

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

1    2    3    4     $\Sigma$

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

## Naloga 1 [25 točk]

S pomočjo razcepa Choleskega ugotovite, za katera realna števila  $a$  je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|

1 2 3 4  $\Sigma$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

Vpisna številka

---

Ime in priimek

## Naloga 1 [25 točk]

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nesingularna matrika. Podan je njen  $LU$  razcep brez pivotiranja, torej spodnja trikotna matrika  $L$  z enkami na diagonali in zgornja trikotna matrika  $U$ , da je  $A = LU$ . Naj bo podan še vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

- Preverite, da ima sistem  $(A + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  enolično rešitev.
- Zapišite ekonomičen algoritem za reševanje sistema  $(A + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$  in preštejte točno število operacij.

## Naloga 2 [25 točk]

Rešujete polinomske enačbo  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ . Določite parametre  $a, b, c \in \mathbb{R}$  v iteracijski funkciji  $g(x) = ax + bp(x) + cp'(x)$  tako, da bo zaporedje  $x_{r+1} = g(x_r)$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , konvergiral k največji rešitvi enačbe  $p(x) = 0$  z redom konvergence vsaj 3 za vsak začetni približek, ki je dovolj blizu te rešitve. Pri tako določenih parametrih izračunajte  $x_1$ , če je  $x_0 = 3.1$ .

### Naloga 3 [25 točk]

Naj bo  $A = [1, 1, 1, 1]^T$  in  $\mathbf{b} = [0, 1, 2, 3]^T$ . S Householderjevimi zrcaljenji določite razširjeni  $QR$  razcep matrike  $A$  in z njegovo pomočjo izračunajte rešitev sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  po metodi najmanjših kvadratov.



## Naloga 4 [25 točk]

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična matrika,  $\lambda_1$  njena največja lastna vrednost po absolutni vrednosti,  $\mathbf{x}_1$  pripadajoči lastni vektor, za katerega je  $\|\mathbf{x}_1\|_2^2 = 1$  ter  $B = A - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T$  Hotellingova redukcija matrike  $A$ .

a) Dokazite, da je  $\det B = 0$  in  $\text{sled}(A) - \text{sled}(B) = \lambda_1$ .

b) Preverite, da je  $B^2 = A^2 - \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T$ .

c) Izračunajte  $B$  v primeru, ko je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Naloga 2 [25 točk]

Določite tako iteracijsko funkcijo  $g$  za reševanje polinomske enačbe  $p(x) = 4x^3 - 3x - 1 = 0$ , da bo zaporedje približkov  $x_{r+1} = g(x_r)$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , konvergiral k rešitvi  $a = 1$  enačbe  $p(x) = 0$  za vsak začetni približek  $x_0$ , ki je dovolj blizu  $a$ .

### Naloga 3 [25 točk]

Koliko lastnih vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & a \end{pmatrix},$$

kjer je  $a \in \mathbb{R}$ , je pozitivnih? Na vprašanje odgovorite brez računanja lastnih vrednosti.

## Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem

$$y''' + 2xy'' - 3y = 2e^{-x(2x-1)}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 2.$$

a) Problem zapišite kot sistem treh enačb prvega reda oblike

$$\mathbf{Y}'(x) = A(x)\mathbf{Y}(x) + \mathbf{b}(x),$$

kjer je  $A(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  in  $\mathbf{Y}(x)$ ,  $\mathbf{b}(x) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

b) Poiščite približek za  $y'(0.5)$  s trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})),$$

s korakom  $h = 0.5$ .