

Numerične metode: 2. izpit

12. 2. 2021

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20)

Dana je funkcija

$$f(x) = \sinh(x)(e^{-x} - e^{-3x}).$$

Vse izračune delamo v standardni dvojni natančnosti. Predpostaviti smete, da sta elementarni funkciji $\sinh$ in $\exp$ izračunani do računske natančnosti točno za vse argumente.

a) (10) Pri izračunu $f(10^{-5})$ dobimo rezultat $1.9999600004650104 \cdot 10^{-10}$, točen rezultat pa je enak $1.9999600004666627 \cdot 10^{-10}$. Relativna napaka izračuna je približno 10^{-12} namesto pričakovane napake okoli 10^{-16} . Kaj je razlog za izgubo natančnosti? Razložite s pomočjo Taylorjeve vrste in podajte idejo, kako izraz izračunati bolj točno za x blizu 0.

Pomoč: $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

b) (5) Pri izračunu $f(1000)$ funkcija vrne NaN. Zakaj pride do tega? Preoblikujte izraz, tako da bo dal pravilen (in končen) odgovor tudi za $f(10^9)$ ali $f(\infty)$. Odgovor utemeljite.

c) (5) Pri izračunu $f(-1000)$ prav tako dobimo NaN. Preoblikujte izraz, da bo odgovor smiseln tudi za $f(-10^9)$ ali $f(-\infty)$. Odgovor utemeljite.

2. naloga (20 točk)

Iščemo ničle funkcije $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

a) (5) Dokažite, da ima f natanko eno ničlo $\alpha \in [1, 3/2]$.

b) (10) Utemeljite dejstvo, da je iteracijska funkcija

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

primerna za iskanje α , če za začetni približek vzamete $x_0 = 1$.

c) (5) Izberite $x_0 = 1$ in tvorite zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$. Poiščite čim boljšo oceno za $|x_{10} - \alpha|$, če veste, da je $|x_0 - \alpha| < 0.4$.

Namig: Pomagajte si z g' na $[x_0, x_1]$.

3. naloga (20 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 9 & a & -9 \\ 6 & 5 & -8 \\ -9 & b & c \end{bmatrix},$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$. Določite vse kombinacije prostih parametrov, pri katerih je A simetrična pozitivno semidefinitna.

4. naloga (20 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna matrika za katero je znan LU razcep brez pivotiranja $A = LU$. Matriko A razširimo s stolpcem in vrstico do nesingularne matrike

$$B = \begin{bmatrix} A & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^\top & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ realna vektorja in α realno število.

a) (10) Zapišite učinkovit algoritem za računanje LU razcepa matrike B in preštejte število operacij do vodilnega faktorja natančno.

b) (10) Denimo, da smo z LU razcepom rešili sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za desno stran $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ in da si lahko zapomnimo poljubne vmesne rezultate. Izpeljite algoritem za reševanje sistema

$$B\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ in $\beta \in \mathbb{R}$.