

Linearne preslikave 2. del

Ponovitev definicij

Ponovimo definiciji vektorskega podprostora in linearne preslikave.

Definicija vektorskega podprostora

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F . Podmnožica W v V je **vektorski podprostor**, če za vsaka $w_1, w_2 \in W$ in vsaka $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ velja $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$

Definicija linearne preslikave

Naj bosta U in V vektorska prostora nad poljem F . Preslikava $L: U \rightarrow V$ je **linearna**, če za vsaka $u_1, u_2 \in U$ in vsaka $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ velja $L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L u_1 + \alpha_2 L u_2$

Vsaki linearni preslikavi bomo priredili dva podprostora: jedro in slika.

V nadaljevanju predpostavljamo, da so vsi vektorski prostori nad istim poljem F in da so končno-razsežni.

Jedro linearne preslikave

Definicija jedra

Jedro linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ je množica

$$\text{Ker } L = \{u \in U \mid Lu = 0\}$$

Opomba: Angleški izraz za jedro je “kernel”. Nekateri uporabljajo tudi izraz “null-space” in potem jedro označijo z $\mathcal{N}(L)$.

Trditev 1

Jedro linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v U

Dokaz: Radi bi pokazali, da za vsaka $u_1, u_2 \in \text{Ker } L$ in $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ velja $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \text{Ker } L$. Po definiciji jedra iz $u_1, u_2 \in \text{Ker } L$ sledi $Lu_1 = 0$ in $Lu_2 = 0$. Po definiciji linearne preslikave odtod sledi

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0.$$

Po definiciji jedra odtod sledi, da velja $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \text{Ker } L$.

Definicija ničnosti

Ničnost linearne preslikave L je število

$$n(L) = \dim \operatorname{Ker} L$$

Opomba: Angleški izraz za ničnost je “nullity”.

Trditev 2

Naslednje lastnosti linearne preslikave L so ekvivalentne:

- (1) $\operatorname{Ker} L = \{0\}$,
- (2) $n(L) = 0$,
- (3) L je injektivna.

Dokaz: Ekvivalenca med (1) in (2) je očitna.

Če velja (3), potem iz $Lu = L0$ sledi $u = 0$, torej velja (1).

Recimo, da velja (1). Vzemimo taka $u_1, u_2 \in U$, da velja $Lu_1 = Lu_2$. Ker je L linearna, je $L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = 0$, torej je $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} L$. Iz (1) sledi, da je $u_1 - u_2 = 0$, torej je $u_1 = u_2$. Torej iz (1) sledi (3).

Slika linearne preslikave

Definicija slike

Slika linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ je množica

$$\text{Im } L = \{Lu \mid u \in U\}$$

Opomba: Angleški izraz za sliko je “image”. Nekateri uporabljajo tudi izraz “range” in potem sliko označijo z $\mathcal{R}(L)$.

Trditev 3

Slika linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ je vektorski podprostor v V

Dokaz: Radi bi pokazali, da za vsaka $v_1, v_2 \in \text{Im } L$ in vsaka $\beta_1, \beta_2 \in F$ velja $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \in \text{Im } L$. Po definiciji slike iz $v_1, v_2 \in \text{Im } L$ sledi, da obstajata taka $u_1, u_2 \in U$, da velja $v_1 = Lu_1$ in $v_2 = Lu_2$. Odtod sledi

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \beta_1 Lu_1 + \beta_2 Lu_2 = L(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)$$

ker je L linearna preslikava. Po definiciji slike odtod sledi, da element $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ pripada $\text{Im } L$, saj je slika elementa $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \in U$.

Definicija ranga

Rang linearne preslikave L je število

$$r(L) = \dim \operatorname{Im} L.$$

Direktno iz definicij dobimo:

Trditev 4

Naslednje lastnosti linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ so ekvivalentne:

- (1) $\operatorname{Im} L = V$,
- (2) $r(L) = \dim V$,
- (3) L je surjektivna.

Opomba: Linearna preslikava $L: U \rightarrow V$ je **ničelna**, če velja $Lu = 0$ za vsak $u \in U$. Če sta U in V končno-razsežna vektorska prostora, potem so ekvivalentne trditve: (1) L je ničelna, (2) $\operatorname{Ker} L = U$, (3) $n(L) = \dim U$, (4) $\operatorname{Im} L = \{0\}$, (5) $r(L) = 0$.

Osnovna formula

Osnovna formula povezuje ničnost in rang.

Izrek 1: Osnovna formula

Za vsako linearno preslikavo $L: U \rightarrow V$ velja

$$n(L) + r(L) = \dim U.$$

Dokaz: Naj bo $w_1, \dots, w_k$ baza za $\text{Ker } L$ in naj bo $u_1, \dots, u_l$ njena dopolnitev do baze U . Velja torej $\dim \text{Ker } L = k$ in $\dim U = k + l$.

Dokazati moramo še, da velja $\dim \text{Im } L = l$.

Zadošča dokazati, da je $Lu_1, \dots, Lu_l$ baza za $\text{Im } L$. Vzemimo poljuben $v \in \text{Im } L$ in izberimo tak u , da je $v = Lu$. Razvijo u po bazi za U :

$$u = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l$$

Ker je L linearna in ker je $Lw_1 = \dots = Lw_k = 0$, odtod sledi

$$Lu = \alpha_1 Lw_1 + \dots + \alpha_k Lw_k + \beta_1 Lu_1 + \dots + \beta_l Lu_l = \beta_1 Lu_1 + \dots + \beta_l Lu_l$$

Torej so $Lu_1, \dots, Lu_l$ ogrodje za $\text{Im } L$.

Pokažimo sedaj, da so vektorji $Lu_1, \dots, Lu_l$ linearno neodvisni. Če je $\beta_1 Lu_1 + \dots + \beta_l Lu_l = 0$, potem $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l \in \text{Ker } L$. Ker je $w_1, \dots, w_k$ baza za $\text{Ker } L$, obstajajo taki $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in F$, da je

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_l w_l$$

Ker je $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_l$ baza za U , odtod sledi $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$. $\square$

Posledica 1

Za vsako linearno preslikavo $L: U \rightarrow V$ obstaja taka baza $\mathcal{B}$ za U in taka baza $\mathcal{C}$ za V , da velja

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kjer je I identična matrika velikosti $r(L)$.

Dokaz: Naj bodo $w_1, \dots, w_k$ in $u_1, \dots, u_l$ kot v dokazu osnovne formule. Naj bo $z_1, \dots, z_s$ dopolnitev $Lu_1, \dots, Lu_l$ do baze za V . Vzemimo

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_k\} \quad \text{in} \quad \mathcal{C} = \{Lu_1, \dots, Lu_l, z_1, \dots, z_s\}$$

Ocena za ničnost

V nadaljevanju bomo potrebovali oceno za ničnost kompozituma.

Trditev 5

Naj bosta $L: U \rightarrow V$ in $K: V \rightarrow W$ linearni preslikavi. Potem velja

$$n(K \circ L) \leq n(K) + n(L)$$

Dokaz: Če uporabimo osnovni izrek za linearno preslikavo

$$\tilde{L}: \text{Ker}(K \circ L) \rightarrow \text{Ker } K, \quad \tilde{L}(u) = L(u)$$

dobimo $n(\tilde{L}) + r(\tilde{L}) = \dim \text{Ker}(K \circ L)$. Ker je $\text{Ker } \tilde{L} \subseteq \text{Ker } L$, velja

$$n(\tilde{L}) = \dim \text{Ker } \tilde{L} \leq \dim \text{Ker } L = n(L)$$

Ker je $\text{Im } \tilde{L} \subseteq \text{Ker } K$, velja

$$r(\tilde{L}) = \dim \text{Im } \tilde{L} \leq \dim \text{Ker } K = n(K)$$

Jedro in slika matrike

Vsaki $m \times n$ matriki A z elementi iz F lahko priredimo linearno preslikavo

$$L_A: F^n \rightarrow F^m \quad L_A v = Av$$

Jedro in sliko matrike A definiramo takole

$$\text{Ker } A := \text{Ker } L_A \quad \text{in} \quad \text{Im } A := \text{Im } L_A$$

Se pravi

$$\text{Ker } A = \{v \in F^n \mid Av = 0\}$$

in

$$\text{Im } A = \{Av \mid v \in F^n\}.$$

Elemente F^n si obakrat predstavljamo kot stolpčne vektorje.

Trditev 6

Slika matrike je enaka linearni ogrinjači njenih stolpcev. Rang matrike je enak maksimalnemu številu linearno neodvisnih stolpcev te matrike.

Dokaz: Če so $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A in $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ komponente vektorja v , potem je $Av = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$. Torej je

$$\text{Im } A = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\} = \text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

Izberimo take stolpce $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$, ki so linearno neodvisni in ki zadoščajo $\text{Lin}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} = \text{Lin}\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$. Potem so stolpci $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ baza podprostora $\text{Im } A$. Odtod sledi, da je rang matrike A enak r , se pravi maksimalnemu številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A . □

Opomba: Linearni ogrinjači stolpcev matrike A pravimo **stolpčni prostor** matrike A in jo označimo z $\text{Col } A$. Dokazali smo, da je $\text{Im } A = \text{Col } A$.

Opomba: Linearni ogrinjači vrstic matrike A pravimo **vrstični prostor** matrike A in jo označimo z $\text{Row } A$. Očitno elemente $\text{Row } A$ dobimo tako, da transponiramo elemente $\text{Col } A^T = \text{Im } A^T$.

Primer

Izračunaj sliko in rang matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Najprej izračunamo reducirano vrstično stopničasto formo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ker elementarne vrstične transformacije ohranjajo linearne relacije med stolpci, odtod sledi, da je $r(A) = 2$ in

$$\text{Im } A = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$$

Stolpčna in vrstična ekvivalentnost matrik

Pravimo, da sta matriki A in B **stolpčno ekvivalentni**, če lahko dobimo eno iz druge s pomočjo elementarnih stolpčnih transformacij, se pravi, če obstaja taka obrnljiva matrika Q , da je $B = AQ$.

Pravimo, da sta matriki A in B **vrstično ekvivalentni**, če lahko dobimo eno iz druge s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij, se pravi, če obstaja taka obrnljiva matrika P , da je $B = PA$.

Trditev 7

Naj bosta A in B $m \times n$ matriki nad poljem F .

- (1) Če sta A in B stolpčno ekvivalentni, potem imata enak stolpčni prostor in enako sliko. Imata tudi enak rang in enako ničnost.
- (2) Če sta A in B vrstično ekvivalentni, potem imata enak vrstični prostor in enako jedro. Imata tudi enako ničnost in enak rang.

Dokaz: Če sta A in B stolpčno ekvivalentni, potem obstaja taka obrnljiva matrika Q , da je $B = AQ$. Pokažimo najprej, da velja $\text{Im } AQ = \text{Im } A$.

Za vsak $v \in F^n$ so ekvivalentne trditve: (a) $v \in \text{Im } AQ$, (b) $v = AQ u$ za nek $u \in F^n$, (c) $v = A u'$ za nek $u' \in F^n$, (d) $v \in \text{Im } A$. Ekvivalentnost med (b) in (c) sledi iz obrnljivosti matrike Q .

Iz $\text{Im } A = \text{Im } B$ sledi $r(A) = \dim \text{Im } A = \dim \text{Im } B = r(B)$. Po osnovni formuli odtod sledi $n(A) = n - r(A) = n - r(B) = n(B)$.

Če sta matriki A in B vrstično ekvivalentni, potem obstaja taka obrnljiva matrika P , da velja $B = PA$. Pokažimo, da je $\text{Ker } PA = \text{Ker } A$. Za vsak $v \in F^n$ je $Av = 0$ ekvivalentno s $PAv = 0$ zaradi obrnljivosti matrike P .

Iz $\text{Ker } A = \text{Ker } B$ sledi $n(A) = \dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } B = n(B)$. Po osnovni formuli je torej $r(A) = n - n(A) = n - n(B) = r(B)$. □

Opomba: Poglejmo si, kakšna je zveza med $\text{Ker } A$ in $\text{Row } A$. Očitno je vektor iz F^n v $\text{Ker } A$ natanko tedaj, ko je “pravokoten” na vse vrstice matrike A , se pravi, natanko tedaj, ko je “pravokoten” na $\text{Row } A$. Učeno se temu reče, da je $\text{Ker } A$ “ortogonalni komplement” od $\text{Im } A^T = (\text{Row } A)^T$.

Ekvivalentnost matrik

Definicija

Matriki A in B sta **ekvivalentni** (oznaka $A \sim B$) natanko tedaj, ko obstajata taki obrnljivi matriki P in Q , da velja $B = PAQ$.

Opomba: Dve matriki sta ekvivalentni natanko tedaj ko lahko dobimo eno iz druge s pomočjo elementarnih vrstičnih in stolpčnih transformacij.

Trditev 8

Ekvivalentnost matrik je ekvivalenčna relacija.

Dokaz: Ekvivalentnost matrik A in B označimo z $A \sim B$. Dokažimo najprej $A \sim A$. To sledi iz $A = I_m A I_n$ in obrnljivosti matrik I_m in I_n .

Če je $A \sim B$, potem je $B = PAQ$ za obrnljivi matriki P, Q . Odtod sledi $A = P^{-1}BQ^{-1}$, kjer sta tudi P^{-1}, Q^{-1} obrnljivi. Torej je $B \sim A$.

Če je $A \sim B$ in $B \sim C$, potem je $B = P_1 A Q_1$ in $C = P_2 B Q_2$ za neke obrnljive matrike P_1, Q_1, P_2, Q_2 . Odtod sledi, da je $C = P_2 P_1 A Q_1 Q_2$ in da sta matriki $P_2 P_1$ in $Q_1 Q_2$ obrnljivi. Torej je $A \sim C$.

Primer

Naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bazi za U in $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bazi za V . Potem sta matriki $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ in $[L]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'}$ ekvivalentni. Velja namreč

$$[L]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$$

in matriki $P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ ter $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ sta obrnljivi.

Opomba: Velja tudi obratno. Če sta matriki A in A' ekvivalentni, potem obstaja taka linearna preslikava $L: U \rightarrow V$ in take baze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ za U in $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ za V , da je $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = A$ in $[L]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = A'$.

Dokaz: Recimo, da je $A' = PAQ$, kjer sta P in Q obrnljivi matriki. Naj bo $U = F^n$ in $V = F^m$ in naj bo $L = L_A$, se pravi linearna preslikava, ki vektor množi z matriko A . Naj bo $\mathcal{B}$ standardna baza za F^n in $\mathcal{C}$ standardna baza za F^m . Potem velja $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = A$. Naj bodo $\mathcal{B}'$ stolpci matrike P^{-1} in naj bodo $\mathcal{C}'$ stolpci matrike Q . Potem velja $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}'} = P^{-1}$ in $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = Q$. Torej je $[L]_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = PAQ = A'$.

Vsaka matrika ranga r je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dokaz: Naj bo A $m \times n$ matrika nad F . Po Posledici 1 obstajata taka baza $\mathcal{B}$ za F^n in taka baza $\mathcal{C}$ za F^m , da velja

$$[L_A]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Naj bosta $\mathcal{S}_n$ in $\mathcal{S}_m$ standardni bazi za F^n in F^m . Potem je

$$A = [L_A]_{\mathcal{S}_m \leftarrow \mathcal{S}_m} = P_{\mathcal{S}_m \leftarrow \mathcal{C}} [L_A]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}_n} = P_{\mathcal{S}_m \leftarrow \mathcal{C}} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}_n}$$

kjer sta $P_{\mathcal{S}_m \leftarrow \mathcal{C}}$ in $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{S}_n}$ obrnljivi matriki. Torej je $A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Opomba: Bolj računski dokaz poteka takole.

Najprej matriko A s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij prevedemo v reducirano vrstično stopničasto formo R . Potem matriko R s pomočjo elementarnih stolpčnih transformacij prevedemo v želeno obliko.

Izrek 2 - Karakterizacija ekvivalentnosti matrik

Dve matriki sta ekvivalentni natanko tedaj, ko imata enako velikost in enak rang.

Dokaz: Recimo, da sta A in B ekvivalentni matriki. Potem obstajata taki obrnljivi matriki P in Q , da velja $B = PAQ$.

Ker so vse obrnljive matrike kvadratne, je matrika PAQ enake velikosti kot matrika A . Torej sta A in B enake velikosti.

Po Trditvi 7 velja $r(PAQ) = r(PA) = r(A)$. Torej imata A in B enak rang.

Recimo sedaj, da imata matriki A in B enako velikost $m \times n$ in enak rang r . Po Trditvi 9 sta tako A kot B ekvivalentni $m \times n$ matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Odtod po Trditvi 8 sledi, da sta A in B ekvivalentni. □

Enakost stolpčnega in vrstičnega ranga

Rangu matrike A pravimo tudi **stolpčni rang** matrike A , ker je enak maksimalnemu številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A .

Rangu matrike A^T pravimo tudi **vrstični rang** matrike A , ker je enak maksimalnemu številu linearno neodvisnih vrstic matrike A .

Radi bi pokazali, da sta stolčni in vrstični rang matrike A enaka.

Izrek 3

Za vsako matriko A je $r(A) = r(A^T)$.

Dokaz: Če je A $m \times n$ matrika ranga r , potem po Trditvi 9 obstajata taki obrnljivi matriki P in Q , da velja

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

Odtod sledi

$$A^T = Q^T \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T P^T.$$

Ker sta P in Q obrnljivi matriki, sta tudi P^T in Q^T obrnljivi.

Po Trditvi 7 odtod sledi

$$r(A^T) = r(Q^T \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T) = r(\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T) = r$$

Torej je

$$r(A) = r = r(A^T)$$

Opomba: Matrika $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je velikosti $m \times n$, matrika $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ pa je velikosti $n \times m$. Imata pa obe enak rang r .