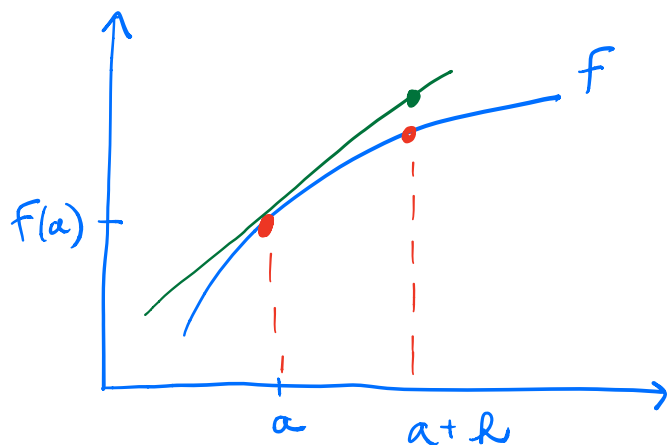


NALOGA: S POMOČJO LINEARNE APROKSIMACIJE OZ.
DIFERENCIALNEGA RAČUNA IZRAČUNAJ PRIBLIŽKA
ZA VREDNOSTI $\ln(1.2)$ IN $\sqrt{0.97}$.

OSNOVNA IDEJA:



VREDNOST $f(a+l)$ OCENIMO
Z VREDNOSTJO PRI $x=a+l$
NA TANGENTI NA GRAF f
SKOZI TOČKO $(a, f(a))$:

$$f(a+l) \approx f(a) + f'(a) \cdot l$$

NAŠA UPORABA:

ZA a IZBEREMO TOČKO, KI JE BLIZU VREDNOSTI,
V KATERI RAČUNAMO f , TER IMA LASTNOST,
DA ZNAMO IZRAČUNATI $f(a)$ IN $f'(a)$.

$$\ln(1.2) \rightsquigarrow a=1, f(x)=\ln x, l=+0.2$$

$$f(1)=\ln 1=0$$

$$f'(1)=\frac{1}{x}|_{x=1}=1$$

$$\ln 1.2 \approx f(1) + f'(1) \cdot l = 0 + 1 \cdot 0.2 = 0.2$$

$$\sqrt{0.97} \rightsquigarrow a=1, f(x)=\sqrt{x}, l=-0.03.$$

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=1}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{0.97} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0.03) = 0.985$$

NALOGA: DOKAŽI LEIBNITZOVO PRAVILO ZA n -TI ODVOD
PRODUKTA DVEH FUNKCIJ

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

IZRAČUNAJ $(x \cos(2x))^{(100)}$.

DOKAZ Z INDUKCIJO:

$n=1$: $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$ LEVA STRANA

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)}$$

$$= fg' + f'g$$

DEKNA STRANA

$n \rightarrow n+1$

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = ((f \cdot g)^{(n)})' \stackrel{\text{i.p.}}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \right)$$

SPOMNIMO: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

DO TEHA ŽELIMO PRITI

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}}_{k \neq n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}}_{k \neq 0}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \underbrace{f^{(n+1)}}_{\substack{\text{IZ PRVE} \\ \text{VSOTE ZA} \\ k=n+1}} g + f \underbrace{g^{(n+1)}}_{\substack{\text{IZ DRUGE} \\ \text{VSOTE} \\ \text{ZA } k=0}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \text{TO SMO ŽELELI} \\ \text{TUDI DOKAZATI!}$$

$$(x \cos 2x)^{(100)} = ?$$

VE MO: x LAHKO ODVAJAMO NASVETU $1x$

$$(\cos 2x)^{(4k+m)} = (\cos 2x)^{(m)} \cdot 2^{4k}$$

$$(x \cos 2x)^{(100)} = x (\cos 2x)^{(100)} + \binom{100}{1} (x)' (\cos 2x)^{(99)}$$

$$= 2^{100} x \cos 2x + 2^{99} \cdot 100 \cdot \sin 2x$$

$$= 2^{100} (x \cos 2x + 50 \sin 2x)$$

NALOHA:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Pokaži, da je f na $\mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva, ni pa zvezno odvedljiva.

V splošnem velja:

- ~ če f odvedljiva v $a \in \mathbb{R}$, je tam tudi zvezna.
- ~ f je zvezno odvedljiva na $D \subset \mathbb{R}$, če je odvedljiva v vsaki $a \in D$ in je $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija.

Naš sklep: v naši nalogi je očitno, da je f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$, ker je tam elementarna in dobro definirana. Dokazati moramo torej le dve:

(i) da obstaja odvod $f'(0)$ (potem je f tudi zvezna v $x=0$).

(ii) da odvod f' ni zvezen v $x=0$.

Začnimo z (i):

$$\begin{aligned} f'(0) &\stackrel{\text{DEF}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0. \end{aligned}$$

ONEJENA

KAKO JE Z (ii) OZ. ZVEZMOSTJO f' ?

ZA $x \neq 0$ JE $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$ IN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Torej JE CELOTEJ ODVOD ZA f ENAK!

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

TA FUNKCIJA NI ZVEZNA V $x=0$, KER $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ NE OBSTAJA.

SKICA:

