

1. Dan je graf $G = (V, E)$, kjer je $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ in $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

(a) Graf G čim lepše narišite.

(b) Poiščite stopnje vseh vozlišč ter minimalno in maksimalno stopnjo grafa G .

2. Za $n \geq 1$ definiramo "graf šahovskega kralja" H_n takole: vozlišča H_n so polja šahovnice $n \times n$, vozlišči u in v pa sta med seboj povezani, če šahovski kralj lahko pride iz polja u v polje v v eni potezi.

(a) Narišite grafa H_2 in H_3 .

(b) Koliko vozlišč in koliko povezav ima graf H_n ? Poiščite še stopnje vozlišč (koliko vozlišč posamezne stopnje vsebuje graf H_n).

3. Graf je n -permutacijski graf, če je njegova množica vozlišč enaka množici permutacij S_n , dve vozlišči π_1 in π_2 pa sta sosednji, če obstaja transpozicija τ , da velja $\pi_1 = \tau \pi_2$.

(a) Narišite 3-permutacijski graf.

(b) Koliko vozlišč ima n -permutacijski graf? Koliko ima povezav?

(c) Ali je n -permutacijski graf regularen? Kolikšne so stopnje vozlišč v n -permutacijskem grafu?

(d) Ali vsebuje n -permutacijski graf kak 5-cikel kot podgraf?

4. Na zabavi se je zbralo 13 ljudi. Vsak je s seboj prinesel 3 darila, ki bi jih rad izmenjal s tremi drugimi udeleženci zabave. Ali je to izvedljivo? Predstavite kot problem iz teorije grafov in ga rešite.

5. Za vsak $k < n$ in vsaj en izmed k, n sod, konstruiraj k -regularen graf na n vozliščih.

6. Naj bo G graf na n vozliščih in m povezavah. Koliko ima vpetih podgrafov in koliko induciranih? Koliko vpetih, induciranih in običajnih podgrafov ima poln graf na n vozliščih?

7. Zaporedje $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je *grafovsko*, če obstaja graf z n vozlišči, ki imajo stopnje $d_1, d_2, \dots, d_n$. Pokažite naslednjo trditev.

Naj bo $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$ in $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Potem je zaporedje $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ grafovsko natanko tedaj, ko je grafovsko zaporedje $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ (urejeno padajoče).

8. Katera od naslednjih zaporedij so grafovsko? Za vsako zaporedje, ki je grafovsko, poiščite tudi graf s takšnim zaporedjem stopenj.

(a) $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$

(b) $(5, 5, 4, 3, 3, 3, 2)$

(c) $(7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1)$

(d) $(5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

Domača naloga

9. Pokažite, da ne obstaja 3-regularen graf z lihim številom vozlišč. Koliko vozlišč ima lahko regularen graf s 15 povezavami? Kakšne so njihove stopnje? Naštejte vse možnosti in za vsako možnost po enega od grafov tudi narišite.

10. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf in $|V| \geq 2$. Pokažite, da G vsebuje vsaj dve vozlišči, ki imata isto stopnjo.

11. Študentje organizirajo tekmovanje v igranju igrice "štiri v vrsti". Na tekmovanje se je prijavilo 8 kandidatov. V predtekmovanju naj bi se vsak kandidat pomeril s petimi drugimi. Ali je takšno predtekmovanje mogoče izvesti? Opišite, kako bi problem predstavili in rešili z grafi. Nato problem še rešite.

12. Za $n \geq 1$ definiramo "graf šahovskega konja" L_n takole: vozlišča L_n so polja šahovnice $n \times n$, vozlišči u in v pa sta med seboj povezani, če šahovski konj lahko pride iz polja u v polje v v eni potezi.

(a) Narišite L_3 .

(b) Koliko vozlišč in koliko povezav ima graf L_n ? Poiščite še stopnje vozlišč (koliko vozlišč posamezne stopnje vsebuje graf L_n).

13. Naj bo n naravno število. Pokažite, da je zaporedje

$$(n, n, n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 2, 2, 1, 1)$$

grafovsko. Nasvet: dokaz z indukcijo. Konstruirajte ustrezen graf za $n = 2$. Nato predpostavite, da obstaja graf G_n z zaporedjem stopenj $(n, n, n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 2, 2, 1, 1)$ in iz njega z dodajanjem dveh vozlišč in nekaj povezav sestavite graf G_{n+1} z zaporedjem stopenj $(n+1, n+1, n, n, n-1, n-1, \dots, 2, 2, 1, 1)$.