

Zveznost in limita - razloženje

Limita funkcije:

Definicija: Naj bo

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Naj bo $x_0 \in (a, b)$. Število $A \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f v točki x_0 , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja:

$$0 < |x_0 - x| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Če zgoraj velja, pišemo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Torej: ko se x približuje x_0 , se $f(x)$ približuje A .

Kaj pa se zgodi pri $x_0 = a$ (ali b)? Definirajmo limite me strani.

0

Povezava med limito in zveznostjo nam poda naslednji izrek:

Izrek: Funkcija

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

je v točki x_0 zvezna, natanko tedaj, ko obstaja $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ in velja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

Dokaz: Naj limita obstaja in naj velja (1).

Ta-lim, da je $f(x)$ v $x = x_0$ zvezna.

Sprememimo se definiciji zveznosti f v x_0 :

f je v x_0 zvezna natanko tedaj, ko za vsa $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (2)$$

Naj bo dani $\varepsilon > 0$ poljuben. Iskamo $\delta > 0$,
tako da bo veljala izjava (2).

Vemo: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Po definiciji
limite to pomeni: Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja
 $\delta > 0$ $\ni$:

$$0 < |x - x_0| \Rightarrow |f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Pri $x = x_0$ imamo $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

Torej res velja:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dokazali smo torej: $f(x)$ je v x_0 zvezna.

Obrazložitev: Naj bo $f(x)$ v $x = x_0$ zvezna.

Torej: Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ $\ni$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Od tod sledi tudi:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Torej, po definiciji limite funkcije $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dostajamo in velja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Poščunimo limito te funkcije.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

to funkcijo je
v $x=1$ zvezan
zato lahko
uproslimo
izdel

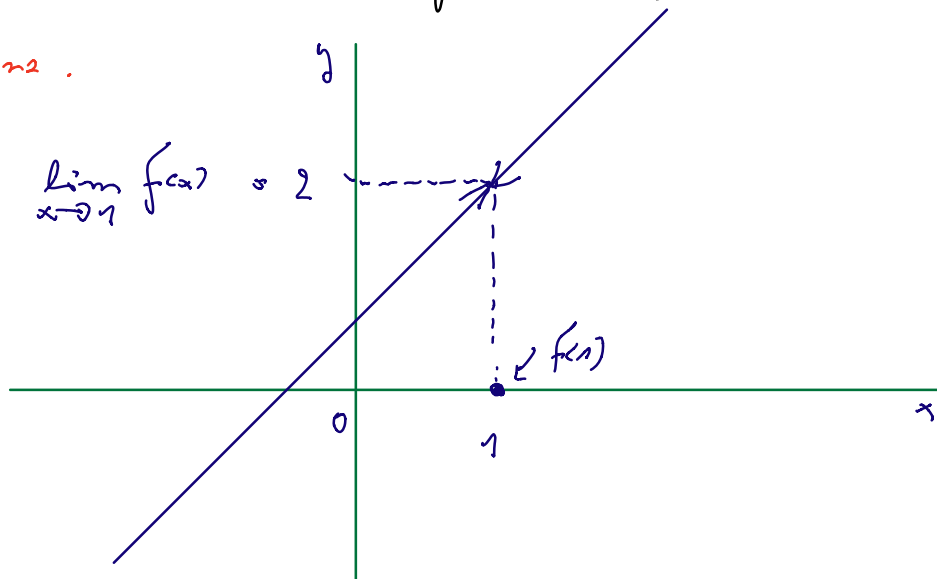
Torej: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Opazimo: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ 2 & & 0 \end{array}$

To po našem izreku pomeni: $f(x)$ v $x=1$ ni

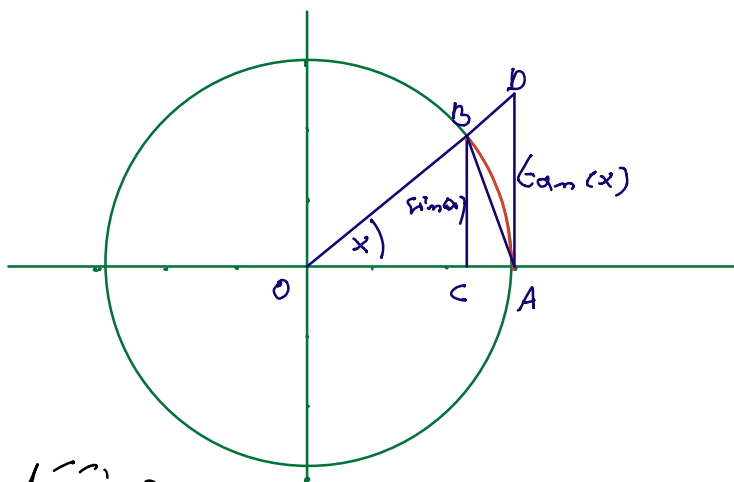
zleži.



Oglejmo si še eno premenljivo limifo

Posledimo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Videli bomo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



Primenjamo plovine
kiser na slici

$$p(OAB) < p\cancel{x}(OAB) < p(OAD)$$

$$1 \cdot \frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < 1 \cdot \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Tag,} \\ \sin(x) < x < \tan(x) \quad /: \sin(x) \\ 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Vzamemo inverznu vrednost i dobijamo:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \text{za } \forall x \neq 0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos(x) \rightarrow 1$$

Tag, za $x \rightarrow 0$, dobijamo:

$$1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\text{Tag: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Limits v neskončnosti;

Definicija Funkcija

$$f: (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ima limit v $+\infty$, če obstaja število A ,

da velja: $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $x_\varepsilon \in (a, \infty)$,

take da velja:

$$x > x_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Funkcija

$$g: (-\infty, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ima limit v $-\infty$, če obstaja B , take da

velja: $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $x_\varepsilon \in (-\infty, b)$,

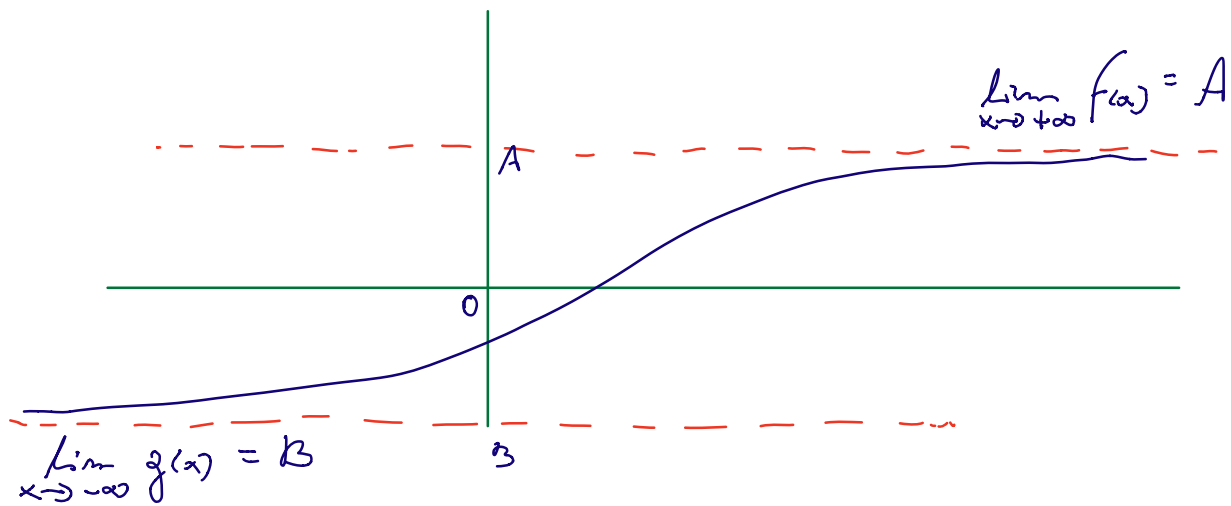
teles de limmo

$$x < x_\varepsilon \implies |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Piĕemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B.$$



Primer: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 7}{7x^2 + 8x + 9}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 7}{7x^2 + 8x + 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}{7 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2})} =$$

$$= \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{7}$$

Levz in desuz limituz

Definicija Funkcija

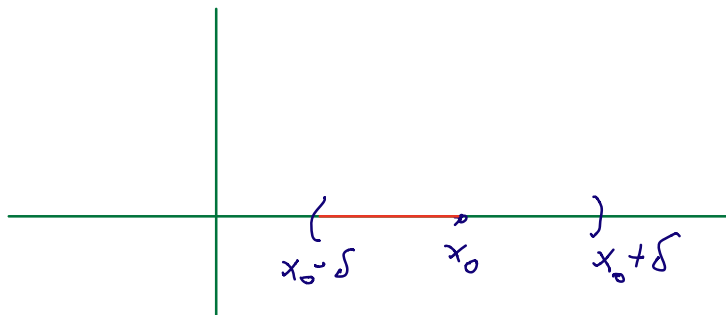
$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ima v x_0 levo limitu enaku A , t.e. velja:

$\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ $\exists$:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0)$$



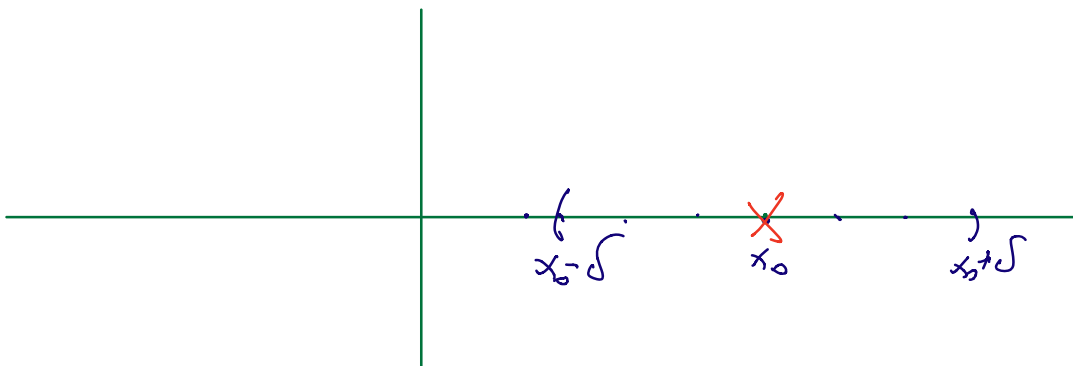
Definicija običajne limite lahko zapisemo:

$f(x)$ ima v x_0 limito A , če za vsak $\varepsilon > 0$,
obstaja $\delta > 0$ $\exists$:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Res:

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$



2.2 Des limite pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = A$$

Seveda je definicija desne limite poseben primer,
 kjer je $x_0 = 0$:

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

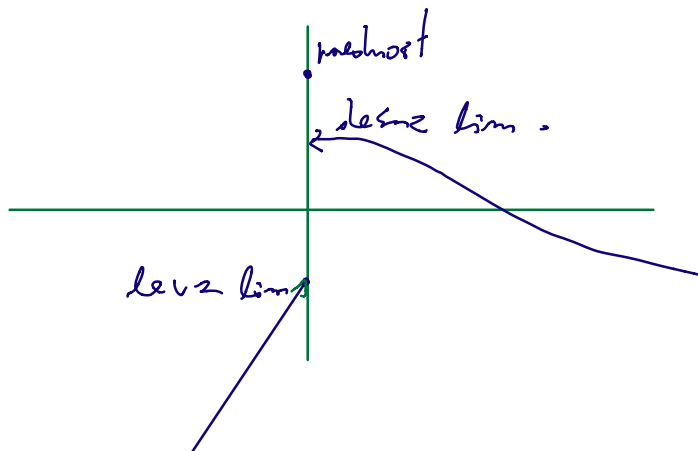
Pišemo:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A.$$

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 4x - 1 & x < 0 \end{cases}$$



Če sta leva in desna limita različni, potem funkcija v tej točki **nima** limite.

Če ima $f(x)$ v $x = x_0$ **skok**, potem v x_0 **nima** limite.

Razmisli o limitah:

Izreki:

1.) Naj velja: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

Potem $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)$ obstaja in velja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g.$$

2.) Za produkt velja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g \right)$$

3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} B \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f}{\lim_{x \rightarrow x_0} g}$$