

Zveznost in limiti - nadaljevanje

Pomembno opozorilo, ki povezuje zvezna funkcija in zaporedja opredeljuje naslednji izrek.

Izrek: Naj bo

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna. Naj bo $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje, ki teži k A .

1.) $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$

2.) zaporedje je konvergentno in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A \in (a, b)$$

Tedy je tudi zaporedje $\{f(\alpha_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno in velja.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(A).$$

Dokaz: Za vsak $\varepsilon > 0$ moramo najti n_ε , tako da bo veljalo:

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |f(\alpha_n) - f(A)| < \varepsilon$$

Ker je f zvezna, obstaja (po definiciji zveznosti) $\delta > 0$, tako da velja

$$|\alpha_n - A| < \delta \Rightarrow |f(\alpha_n) - f(A)| < \varepsilon$$

Ker pa je α_n konvergenca in ker velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A$$

obstaja za $\delta > 0$ tako $n_\delta \in \mathbb{N}$, da velja

$$n > n_\delta \Rightarrow |\alpha_n - A| < \delta$$

Naj bo $n_\varepsilon = n_\delta$. Tedaj po zgorajm velja:

$$\underline{n > n_\varepsilon = n_\delta \Rightarrow |d_n - A| < \delta \Rightarrow |f(d_n) - f(A)| < \varepsilon}$$

Sklepek

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |f(d_n) - f(A)| < \varepsilon$$

$$n_\varepsilon = n_\delta$$

□

Tz izrek bomo uporabili pri dokazu naslednjega izreka, ki govori o ničeln zvezni funkciji.

Izrek Naj bo

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna funkcija, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ in naj velja

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0. \quad *$$

Tedaj obstaja vsaj ena točka $\zeta \in (\alpha, \beta)$,
tako da velja

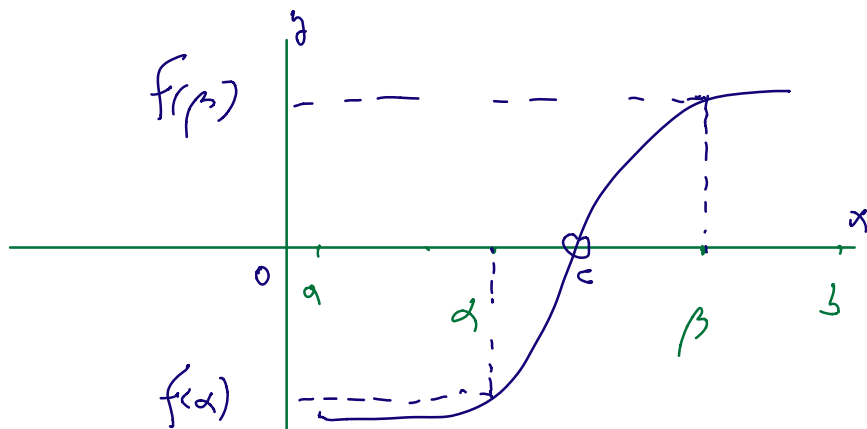
$$f(\zeta) = 0.$$

(ζ je ničla funkcije f).

Opomba: * pomeni

hodiči: $f(\alpha) < 0$ in $f(\beta) > 0$

ali pa: $f(\alpha) > 0$ in $f(\beta) < 0$



Dokaz: Brez pomoči dokazati s pomočjo postopka,
ki se imenuje bisekcija.

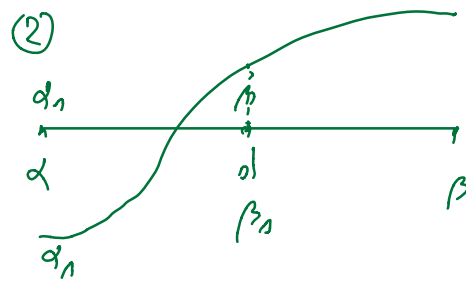
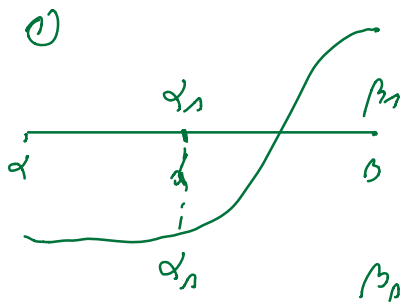
BSS (Brez škode za spletnost) bomo vzeli:
 $f(\alpha) < 0$ in $f(\beta) > 0$.

1. korak: Naj bo $d = \frac{\beta - \alpha}{2}$

Definirajmo:

Če $f(d) < 0 \Rightarrow d = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1$ ①

Če $f(d) > 0 \Rightarrow d = \beta_1, \quad \alpha = \alpha_1$



Kolji smo:

$$f(\alpha_1) < 0 \quad \text{in} \quad f(\beta_1) > 0$$

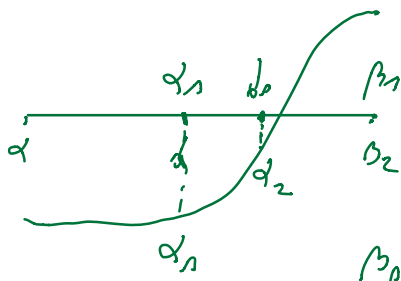
(1 del priredit.)

Te postopke nadaljujemo.

$$d_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$$

$$f(d_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = d_1 \quad \text{in} \quad \beta_2 = \beta_1$$

$$f(d_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = d_1 \quad \text{in} \quad \alpha_2 = \alpha_1$$



Tę postaje niedefiniowaną. Dobieram dwie reprezentacje $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejącą reprezentacją

$\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnącą reprezentacją.

$\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejącą sekwencją: $\alpha_n \leq \beta$

$\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnącą sekwencją: $\beta_n > \alpha$

Tę: reprezentacje $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są konvergentne:

Imam: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = B$

Wtedy: $A = B$, czyli że $\forall n \in \mathbb{N}$ ref.

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n}$$

Tag:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{2^n} = 0$$

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \beta - \alpha$$

$$\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Sedaj po danih:

$$\forall n; \quad f(\alpha_n) < 0$$

$$f(\beta_n) > 0$$

Po prejšnjem izreku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n\right) = f(\alpha)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n\right) = f(\beta)$$

$$f(\alpha_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \leq 0$$

$$f(\beta_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) \geq 0$$

Torej:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{f(A) = f(B) = 0.}$$

To po pravi, ker je

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n)}_{=0} = f\left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}_A\right) = f(A) = 0.$$

Srečo zapišimo: $A \in (\alpha, \beta)$ in zapišimo

$$f(A) = 0.$$

Torej, naša iskana ničla je A.



Naslednji izrek govori o omejenosti zveznih funkcij

Izrek Nij ko zvezna funkcija definirana na **zaprtém končnem intervalu**. Potém je na tem intervalu **omejena**.

Dokaz svet poteka z bičakajo. Postopoma lukste; Predpostavljamo, da je

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna in **ni omejena**. Torej mora biti neskončna vsaj na enem od intervalov

$[a, \frac{b-a}{2}]$ in $[\frac{b-a}{2}, b]$. Tudi premislek ne deluje. Pridemo do zel majhnega intervala, kjer f ni omejena. Tu uporabimo rezultate.

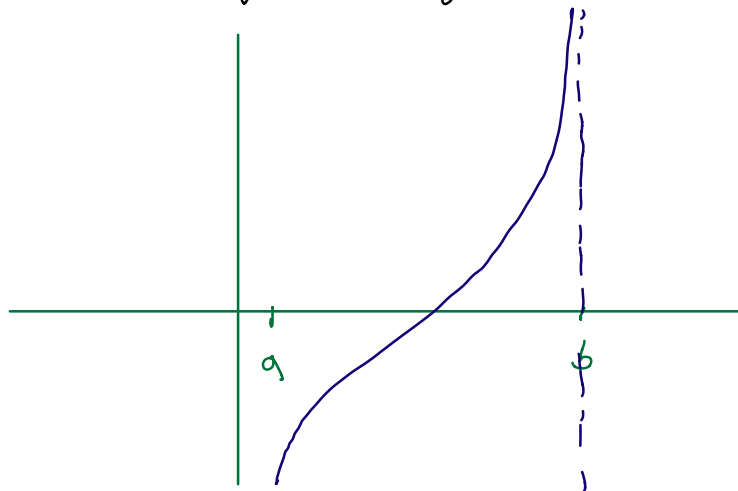
D.N.: Ne pójate dokaz s pomočjo izpoujja naznija. $\square$

Opomba: Interval mora biti res zaprt.

Denimo, da je

$$f: [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zaprta. Problem ni nujno omejena.



✓ Če poznamo: Zbirka vrednosti funkcije

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki je na $[a, b]$ zaprta je **omejena podmnožica** $\mathbb{R}$. Zato je omejen maksimum in minimum.

Torej obstajata števili M in m , ki sta supremum oz. infimum množice

$$\{ f(x) ; x \in [a, b] \}$$

$$\text{Teg: } f(x) \leq M \quad \text{az } \forall x \in [a, b]$$

$$f(x) \geq m \quad \text{az } \forall x \in [a, b]$$

Ízelek: Mij $\hookrightarrow$

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiált az az konvex és szigorú intervallum
 $[a, b]$. Ebben a $[a, b]$ tartományban létezik

x_m és x_M , teljesül a reláció:

$$f(x_M) = M$$

$$f(x_m) = m$$

Összefoglalás: Funkciónak létezik értéke M és m a $[a, b]$ tartományban.

Dokaz: Dokazimo, da je $f(x)$ realna

$$f(x) \leq M \quad \text{za } \forall x \in [a, b]$$

Konstruiramo funkciju

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

Ta funkcija je realna i pozitivna na $[a, b]$,
Zato je po prethodnom izreku moguca ograničiti.
Taj, postoji $N \in \mathbb{R}$, takvo da vrijedi

$$g(x) \leq N$$

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq N$$

$$M - f(x) \geq \frac{1}{N}$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{N} \quad *$$

Predpostavimo: $M = \sup \{ f(x) ; x \in [a, b] \}$

To znaci da 1. M je najmanja granica.

2.) $\exists \varepsilon > 0$ skalo $M - \varepsilon$ ni zgoraj meja

* p2 trdi: $M - \frac{1}{N}$ je zgoraj meja in N je pozitiven, saj je $g(x)$ pozitiven.

T- p2 je protislovje.

Predpostavka $f(x) \leq M$ za $\forall x \in [a, b]$ je biliz napreči.

Torej res obstaja vsaj ena točka x_m :

$$f(x_m) = M$$

Dokaz za obstoj x_m je v bistvu identičen zgorajšnjemu. □

Terminologija: To obstaja x_m v katerem $f(x)$

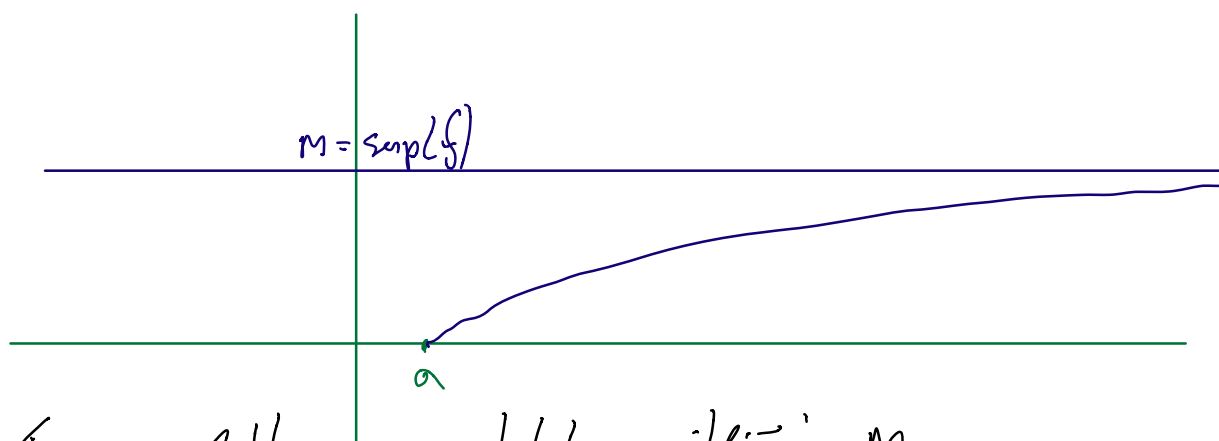
zavzame svoj supremum M na nekem območju,

pozitivno, da ima $f(x)$ maksimum na tem območju

(kaj p f zavzame v x_m ; $f(x_m) = M$.)

$\bar{m}$ obstaja x_m v loku $f(x)$ z vrednost svoj infimum
 m na nekem domeni, pravi, da ima
 $f(x)$ **minimum** na tem domeni
 (ki je tudi x_m ; $f(x_m) = m$)

Opomba: Zgornji meje ref. leže na omejeni intervali
 $[a, b]$; le npr. $[a, \infty)$ ne ref.



$f(x)$ se lahko asimptotsko približuje M in pa
 v nobeni točki ne doseže, če interval ni končen.

Primeren meje, ki ref. za vsako funkcijo ne
 omejenih intervalih je naslednja:

Izrek: Nij ko $[a, b]$ zupet interval in naj ko

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna funkcija. Potem f zvezane vsako
realsko $\alpha \in [m, M]$, kjer je m minimum f
na $[a, b]$, M pa je maksimum na $[a, b]$.

Dokaz: Če je $\alpha = m$ ali če je $\alpha = M$, potem
vemo že po prejšnjem izreku, da obstajata točki
 x_m in x_M t.

$$f(x_m) = m, \quad f(x_M) = M.$$

Torej lahko predpostavimo.

$$\alpha \in (m, M)$$

$$m < \alpha < M.$$

Konstruiramo novo funkcijo:

$$g(x) = f(x) - \alpha.$$

refzi:

$$g(x_m) = f(x_m) - \alpha = m - \alpha < 0$$

$$g(x_M) = f(x_M) - \alpha = M - \alpha > 0.$$

Davim. $x_m < x_M$. ($\hat{C}$ jē ohrats ses, kēcē
dabst nupēj pārsen podobni)

Opazimjro funkcij's

$$g: [x_m, x_M] \longrightarrow \mathbb{R},$$

refzi

$$g(x_m) < 0 \quad \text{in} \quad g(x_M) > 0.$$

Po izvēlen o bisekcij'i obstatz'z bēl's

$$x_2 \in (x_m, x_M),$$

iz kēl's refzi

$$g(x_2) = 0 \quad - x_2 \text{ jē mīrle } g.$$

It p'z p'neni

$$g(x_2) = f(x_2) - \alpha = 0$$

$$f(x_\alpha) = \alpha.$$

Tęż możemy dobrać $x_\alpha \in [a, b]$, w którym mamy, że
 w x_α $f(x)$ przyjmuje wartość α . □

