

Linearne preslikave 3. del

Podobnost kvadratnih matrik

Definicija podobnosti matrik

Kvadratni matriki A in B sta **podobni**, če obstaja taka obrnljiva matrika P , da velja $B = PAP^{-1}$.

Trditev

Podobnost matrik je ekvivalenčna relacija.

Dokaz: Ker je $A = IAI^{-1}$, kjer je I identična matrika, je A podobna A .

Če je matrika A podobna matriki B , potem je $B = PAP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P . Odtod sledi, da je $A = P^{-1}BP = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$ in da je matrika P^{-1} obrnljiva. Torej je tudi matrika B podobna matriki A .

Če je matrika A podobna matriki B in če je matrika B podobna matriki C , potem velja $B = PAP^{-1}$ in $C = QBQ^{-1}$ za obrnljivi matriki P in Q . Odtod sledi $C = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1}$ in da je matrika QP obrnljiva. Torej je matrika A podobna matriki C . □

Opomba: Iz podobnosti sledi ekvivalentnost matrik, obratno pa ni res.

Primer: Podobnost ni ekvivalentnost

Matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sta ekvivalentni, ker imata enako velikost in enak rang. Če bi bili matriki A in B podobni, potem bi obstajala taka obrnljiva matrika P , da bi veljalo $B = PAP^{-1}$. Odtod bi sledilo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kjer} \quad P = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$$

Z množenjem matrik bi dobili

$$\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ u & 0 \end{bmatrix}$$

Odtod pa bi sledilo $u = v = 0$. To bi bilo protislovje s predpostavko, da je matrika P obrnljiva.

Primer podobnih matrik

Naj bo $L: V \rightarrow V$ linearna preslikava in naj bosta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ bazi vektorskega prostora V . Potem sta matriki $[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ in $[L]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}$ podobni, ker velja

$$[L]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} [L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} [L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})^{-1}$$

kjer je $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ obrnljiva matrika.

Opomba: Velja tudi obratno. Če sta kvadratni matriki A in A' podobni, potem obstaja taka linearna preslikava $L: V \rightarrow V$ in taki bazi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$ za V , da velja $[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = A$ in $[L]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'} = A'$.

Trditev

Podobni matriki imata enako determinanto.

Dokaz: $\det PAP^{-1} = \det P \det A \det P^{-1} = \det A \det PP^{-1} = \det A$.

Opomba: Odtod sledi, da je za vsako linearno preslikavo $L: V \rightarrow V$ vrednost izraza $\det[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ neodvisna od izbire baze $\mathcal{B}$. To vrednost vzamemo za definicijo $\det L$.

Primer

Naj bo A kvadratna $n \times n$ matrika nad F . Recimo, da obstaja tak vektor $v \in F^n$, da so vektorji $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ linearno neodvisni (=baza).

Razvijmo vektor $A^n v$ po tej bazi: $A^n v = \alpha_0 v + \alpha_1 Av + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} v$.

Trdimo, da je $A = PBP^{-1}$, kjer je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

in je $P = \begin{bmatrix} v & Av & \dots & A^{n-2}v & A^{n-1}v \end{bmatrix}$ obrnljiva matrika. To sledi iz

$$AP = \begin{bmatrix} Av & A^2v & \dots & A^{n-1}v & A^n v \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Av & A^2v & \dots & A^{n-1}v & \alpha_0 v + \alpha_1 Av + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}v \end{bmatrix} = PB$$

Definicija: B je **pridružena matrika** polinoma $p(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$.

Kaj želimo?

Glavni cilj

Za dano kvadratno matriko A iščemo čimpreprostejšo matriko (=matriko z veliko ničlami), ki ji je podobna.

Ekvivalentno: Za dano linearno preslikavo $L: V \rightarrow V$ iščemo tako bazo $\mathcal{B}$ za V , da bo matrika $[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ čimpreprostejša.

Opomba: Morali se bomo omejiti na kompleksne matrike.

Preproste matrike so recimo:

- diagonalne matrike (Ni vsaka k. matrika podobna diagonalni.)
- zgornje trikotne matrike (Vsaka k. matrika je podobna zg. trikotni.)
- Jordanske kanonične forme (Zelo posebni primeri zgornje trikotnih. Vsaka kompleksna matrika je podobna Jordanski kanonični formi.)
- Frobeniusove kanonične forme (Bločno diagonalne matrike iz pridruženih matrik polinomov. Vsaka matrika je podobna taki.)

Invariantni podprostor

Definicija

Naj bo V vektorski prostor nad F in naj bo $L: V \rightarrow V$ linearna preslikava. Vektorski podprostor W v V je **invarianten** za L , če za vsak $w \in W$ velja $Lw \in W$.

Opomba: Kadar govorimo o invariantnih podprostorih matrike $A \in M_n(F)$ imamo v mislih invariantne podprostore pripadajoče linearne preslikave $L_A: F^n \rightarrow F^n, v \mapsto Av$.

Primeri invariantnih podprostorov

Naj bo $A \in M_n(F)$ in naj bo $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ standardna baza za F^n .

Če je A zgornje trikotna, potem so naslednji podprostor invariantni za A :

$$\text{Lin}\{\mathbf{e}_1\}, \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \dots, \text{Lin}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

Če je A diagonalna, potem so naslednji podprostor invariantni za A :

$$\text{Lin}\{\mathbf{e}_1\}, \text{Lin}\{\mathbf{e}_2\}, \dots, \text{Lin}\{\mathbf{e}_n\}$$

Primer invariantnega podprostora

Naj bo $V = F[x]$ vektorski prostor vseh polinomov s koeficienti v F in naj bo $D: V \rightarrow V$ odvajanje polinomov. Za vsako naravno število n je $F[x]_{\leq n}$ (se pravi vektorski podprostor vseh polinomov v $F[x]$, ki so stopnje $\leq n$) invarianten podprostor za D .

$\text{Ker } L$ in $\text{Im } L$ sta invariantna podprostora za L

Naj bo $L: V \rightarrow V$ linearna preslikava. Očitno L pošlje elemente $\text{Ker } L$ v 0. Ker je $0 \in \text{Ker } L$, torej L pošlje vse elemente $\text{Ker } L$ v elemente $\text{Ker } L$. Torej je $\text{Ker } L$ invarianten podprostor za L .

Očitno L pošlje vse elemente V v elemente $\text{Im } L$. Torej pošlje tudi vse elemente $\text{Im } L$ v elemente $\text{Im } L$. To pomeni, da je $\text{Im } L$ invarianten podprostor za L .

Oglejmo si zdaj posplošitev zadnjega primera na polinome v L .

Naj bo V vektorski prostor nad F . Za vsak polinom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k \in F[x].$$

in vsako linearno preslikavo $L: V \rightarrow V$ definirajmo

$$p(L) = a_0\text{id}_V + a_1L + a_2L^2 + \dots + a_kL^k$$

kjer je $L^2 = L \circ L$, $L^3 = L \circ L \circ L$, itd. Očitno je $p(L)$ linearna preslikava iz V v V , ki pošlje vektor $v \in V$ v $p(L)v = a_0v + a_1Lv + \dots + a_kL^kv$.

Opomba: Podobno za vsako matriko $A \in M_n(F)$ definiramo

$$p(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k$$

Trditev

Naj bo V vektorski prostor nad F in naj bo $L: V \rightarrow V$ linearna preslikava. Za vsaka polinoma $p(x), q(x) \in F[x]$ sta podprostora $\text{Ker } q(L)$ in $\text{Im } q(L)$ invariantna za $p(L)$.

Dokaz: V dokazu bomo uporabili, da je

$$p(L) \circ q(L) = q(L) \circ p(L)$$

kar sledi iz $L^r \circ L^s = L^{r+s} = L^s \circ L^r$ z direktnim računom.

Če je $v \in \text{Ker } q(L)$, potem je $q(L)v = 0$. Odtod sledi $p(L)(q(L)v) = 0$. Po prvem odstavku odtod sledi $q(L)(p(L)v) = 0$. Torej je $p(L)v \in \text{Ker } q(L)$.

Če je $v \in \text{Im } q(L)$, potem obstaja tak $u \in V$, da je $v = q(L)u$. Odtod sledi $p(L)v = p(L)(q(L)v) = q(L)(p(L)v) = q(L)u'$, kjer je $u' = p(L)v$ element V . Odtod sledi, da je $p(L)v \in \text{Im } q(L)$. □

Invariantni podprostor in glavni cilj

Če ima linearna preslikava invarianten podprostor, potem ji lahko priredimo matriko z veliko ničlami.

Trditev

Naj bo $L: V \rightarrow V$ linearna preslikava in naj bo W invarianten podprostor za L . Izberimo bazo $w_1, \dots, w_k$ za W in jo dopolnimo do baze $\mathcal{B}$ za V . Potem je $[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ bločno zgornje trikotna matrike, se pravi

$$[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

za neko $k \times k$ matriko A in neki matriki B in C .

Dokaz: Naj bodo $v_1, \dots, v_l \in V$ taki vektorji, da je $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_l$ baza za V . Označimo to bazo z $\mathcal{B}$. Ker je W invarianten podprostor za L , so $Lw_1, \dots, Lw_k \in W$. Torej lahko $Lw_1, \dots, Lw_k$ razvijemo po $w_1, \dots, w_k$:

$$Lw_1 = \alpha_{1,1}w_1 + \dots + \alpha_{1,k}w_k$$

$$\vdots$$

$$Lw_k = \alpha_{k,1}w_1 + \dots + \alpha_{k,k}w_k$$

Vektorje $Lv_1, \dots, Lv_l$ razvijmo po bazi $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_l$

$$Lv_1 = \beta_{1,1}w_1 + \dots + \beta_{1,k}w_k + \gamma_{1,1}v_1 + \dots + \gamma_{1,l}v_l$$

$$\vdots$$

$$Lv_l = \beta_{l,1}w_1 + \dots + \beta_{l,k}w_k + \gamma_{l,1}v_1 + \dots + \gamma_{l,l}v_l$$

Označimo $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_l\}$. Potem je

$$[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{k,1} & \beta_{1,1} & \dots & \beta_{l,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,k} & \dots & \alpha_{k,k} & \beta_{1,k} & \dots & \beta_{l,k} \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{1,1} & \dots & \gamma_{l,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{1,l} & \dots & \gamma_{l,l} \end{bmatrix}$$

Direktna vsota invariantnih podprostorov

V nadaljevanju bomo naleteli na naslednjo situacijo:

Trditev

Naj bo vektorski prostor V direktna vsota podprostorov $W_1, \dots, W_k$. Naj bo $L: V \rightarrow V$ taka linearna preslikava, da so $W_1, \dots, W_k$ invariantni za L . Naj bo $\mathcal{B}_i$ baza za W_i za $i = 1, \dots, k$ in naj bo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$. Potem obstajajo take matrike $A_1, \dots, A_k$ velikosti $\dim W_1, \dots, \dim W_k$, da velja

$$[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

Dokaz je podoben kot pri prejšnji trditvi.

Enorazsežni invariantni podprostor

Pokažimo, da ima vsaka linearna preslikava $L: V \rightarrow V$, kjer je V netrivialen vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, enorazsežen invarianten podprostor.

Naslednje trditve so očitno ekvivalentne:

- (1) L ima enorazsežen invarianten podprostor.
- (2) Obstaja tak neničeln $v \in V$ in tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $Lv = \lambda v$.
- (3) Obstaja tak neničeln $v \in V$ in tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $(L - \lambda \text{id})v = 0$.
- (4) Obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $\text{Ker}(L - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.
- (5) Obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da linearna preslikava $L - \lambda \text{id}$ ni injektivna.
- (6) Obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da linearna preslikava $L - \lambda \text{id}$ ni obrnljiva.
- (7) Obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da velja $\det(L - \lambda \text{id}) = 0$.

Ker smo v kompleksnih številih, ima polinomska enačba

$$\det(L - \lambda \text{id}) = 0$$

vsaj eno netrivialno rešitev λ .

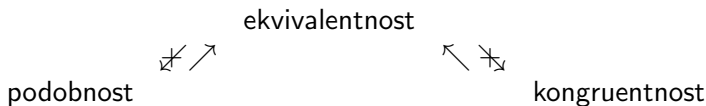
Kongruentnost matrik

Poleg ekvivalentnosti matrik in podobnosti matrik obstajajo še druge ekvivalenčne relacije na matrikah. Čisto na koncu semestra bomo pri teoriji kvadratnih form srečali še kongruentnost matrik.

Definicija kongruentnosti matrik

Pravimo, da sta kvadratni matriki A in B **kongruentni**, če obstaja taka obrnljiva matrika P , da velja $B = PAP^T$.

Opomba: Če sta dve matriki kongruentni, potem sta očitno tudi ekvivalentni. Obratno ni res. Recimo matriki $[1]$ in $[-1]$ sta ekvivalentni, nista pa kongruentni. Imamo torej naslednjo situacijo:



Če v definiciji ekvivalentnosti matrik in podobnosti matrik zamenjamo obrnljive matrike z ortogonalnimi matrikami, potem dobimo definiciji ortogonalne ekvivalentnosti matrik in ortogonalne podobnosti matrik.

Definicije

Kvadratna matrika P je **ortogonalna**, če velja $PP^T = I$.

Matriki A in B sta **ortogonalno ekvivalentni**, če obstajata taki ortogonalni matriki P in Q , da velja $B = PAQ^{-1}$ ($\Leftrightarrow B = PAQ^T$).

Kvadratni matriki A in B sta **ortogonalno podobni**, če obstaja taka ortogonalna matrika P , da velja $B = PAP^{-1}$ ($\Leftrightarrow B = PAP^T$).

